ケプラー問題と力学的対称性（その１）～運動の第一積分～

adhara*

2018 年 5 月 2 日

1　はじめに

このノートでは古典力学のケプラー問題のハミルトニアン

$$H(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}) = \left[\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} - \frac{\kappa}{r}\right] \tag{1}$$

における運動の積分（保存量）について考える。まずハミルトニアン H 自体が運動の積分である。

* Twitter @adhara_mathphys

角運動量ベクトル

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p} \tag{2}$$

を定義すると（記号 $\times$ は外積を表す。)、ケプラー問題のような一般に中心力問題ではこれが保存される。後で直接計算する。

さらに運動の積分として、Laplace-Runge-Lenz（LRL）ベクトルというものがある。LRL ベクトルは

$$\boldsymbol{M} = \frac{1}{m}\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L} - \frac{\kappa \boldsymbol{r}}{r}$$

で定義される。これが保存されることについても後で直接計算により示す。

外積の演算により両ベクトルの各成分は $i = x, y, z$ として、

$$\begin{aligned} L_i &= \sum_{j=x,y,z}\sum_{k=x,y,z} \epsilon_{ijk} r_j p_k \\ M_i &= \frac{1}{m}\sum_{j=x,y,z}\sum_{k=x,y,z} \epsilon_{ijk} p_j L_k - \frac{\kappa r_i}{r} \end{aligned} \tag{3}$$

で与えられることが分かる。（$\epsilon_{xyz} = \epsilon_{yzx} = \epsilon_{zxy} = -\epsilon_{yxz} = -\epsilon_{xzy} = -\epsilon_{zyx} = 1$ である。）これを

$$\begin{aligned} L_i &= \epsilon_{ijk} r_j p_k \\ M_i &= \frac{1}{m}\epsilon_{ijk} p_j L_k - \frac{\kappa r_i}{r} \end{aligned} \tag{4}$$

のように記すことをアインシュタインの縮約と呼ぶ。

2　ハミルトン形式の解析力学

ハミルトン形式の解析力学において、量 $A = A(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t)$ の時間発展は、

$$
\begin{aligned}
\frac{dA}{dt} &= \sum_{i=x,y,z} \left[\frac{\partial A}{\partial r_i} \frac{dr_i}{dt} + \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right] + \frac{\partial A}{\partial t} \\
&= \sum_i \left[\frac{\partial A}{\partial r_i} \frac{dr_i}{dt} + \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right] + \frac{\partial A}{\partial t} \\
&= \sum_i \left[\frac{\partial A}{\partial r_i} \frac{\partial H}{dp_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial H}{dr_i} \right] + \frac{\partial A}{\partial t} \\
&= \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t} \qquad (5)
\end{aligned}
$$

のように与えられる。ただし、ポアソンブラケット

$$
\{A, B\} = \sum_i \left[\frac{\partial A}{\partial r_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial r_i} \right] \qquad (6)
$$

を導入した。

物理量 A が陽に時間に依らないときは、

$$
\frac{dA}{dt} = \{\boldsymbol{A}, H\} \qquad (7)
$$

であり、このときに A が運動の積分、すなわち保存量となるためには、

$$
\{\boldsymbol{A}, H\} = 0 \qquad (8)
$$

が必要十分条件である。

3　角運動量ベクトルと LRL ベクトルの保存則

3.1　角運動量保存則

角運動量ベクトル各成分について、時間発展を計算すると、

$$
\begin{aligned}
\frac{dL_i}{dt} &= \{L_i, H\} \\
&= \sum_{lkj} \left[\frac{\partial}{\partial r_l}(\epsilon_{ijk} r_j p_k) \frac{\partial H}{\partial p_l} - \frac{\partial}{\partial p_l}(\epsilon_{ijk} r_j p_k) \frac{\partial H}{\partial r_l} \right] \\
&= \sum_{lkj} \left[\epsilon_{ijk} p_k \delta_{jl} \frac{\partial H}{\partial p_l} - \epsilon_{ijk} r_j \delta_{lk} \frac{\partial H}{\partial r_l} \right] \\
&= \sum_{lkj} \left[\frac{1}{m} \epsilon_{ilk} p_k p_l \delta_{jl} - \frac{\kappa}{r^3} \epsilon_{ijl} r_j r_l \delta_{lk} \right] \\
&= 0
\end{aligned} \tag{9}
$$

となる。最後の式変形は、$\epsilon_{ilk} p_k p_l = -\epsilon_{ikl} p_l p_k$ 等を用いると和が消えることを利用している。したがって、角運動量ベクトルは保存される。

3.2　LRL ベクトル保存則

LRL ベクトルの各成分の時間発展を計算すると、

$$
\begin{aligned}
\frac{dM_i}{dt} &= \{M_i, H\} \\
&= \sum_l \left[\frac{\partial}{\partial r_l} \left(\sum_{jk} \epsilon_{ijk} p_j L_k - \frac{\kappa r_i}{r} \right) \frac{\partial H}{\partial p_l} \right. \\
&\left. - \frac{\partial}{\partial p_l} \left(\sum_{jk} \epsilon_{ijk} p_j L_k - \frac{\kappa r_i}{r} \right) \frac{\partial H}{\partial r_l} \right] \\
&= \sum_{ljkmn} \left[\frac{\partial}{\partial r_l} \left(\epsilon_{ijk} \epsilon_{kmn} p_j r_m p_n \right) \frac{\partial H}{\partial p_l} \right. \\
&\left. - \frac{\partial}{\partial p_l} (\epsilon_{ijk} \epsilon_{kmn} p_j r_m p_n) \frac{\partial H}{\partial r_l} \right] - \sum_l \frac{\partial}{\partial r_l} \left(\frac{\kappa r_i}{r} \right) \frac{\partial H}{\partial p_l} \\
&= \sum_{ljkmn} \left[\left(\epsilon_{ijk} \epsilon_{kmn} p_j \delta_{lm} p_n \right) \frac{p_l}{m} \right. \\
&\left. - \left(\epsilon_{ijk} \epsilon_{kmn} r_m (p_n \delta_{lj} + \delta_{nl} p_j) \right) \frac{\kappa r_l}{r^3} \right] \\
&+ \sum_l \left(-\frac{\kappa \delta_{li}}{r} + \frac{\kappa r_i r_l}{r^3} \right) \frac{p_l}{m}
\end{aligned}
$$

となる。

ここで

$$
\begin{aligned}
&\sum_{ljkmn} \epsilon_{ijk}\epsilon_{kmn}p_j\delta_{lm}p_np_l \\
&= \sum_{jkmn} \epsilon_{ijk}\epsilon_{kmn}p_jp_np_m \\
&= \sum_{jkmn} \epsilon_{ijk}(\epsilon_{kij}\delta_{mi}\delta_{nj} + \epsilon_{kji}\delta_{mj}\delta_{ni})p_jp_np_m \\
&= \sum_{jk} \epsilon_{ijk}(\epsilon_{kij} + \epsilon_{kji})p_jp_ip_j \\
&= 0 \qquad (10)
\end{aligned}
$$

であること、そして

$$\begin{aligned}
&\sum_{ljkmn} \epsilon_{ijk}\epsilon_{kmn} r_m (p_n \delta_{lj} + \delta_{nl} p_j) r_l \\
&= \sum_{jkmn} \epsilon_{ijk}\epsilon_{kmn} r_m (p_n r_j + r_n p_j) \\
&= \sum_{jkmn} \epsilon_{ijk}\epsilon_{kmn} r_m p_n r_j \\
&= \sum_{jkmn} \epsilon_{ijk} (\epsilon_{kij}\delta_{im}\delta_{nj} + \epsilon_{kji}\delta_{mj}\delta_{in}) r_m p_n r_j \\
&= \sum_{jk} \epsilon_{ijk} (\epsilon_{kij} r_i p_j + \epsilon_{kji} r_j p_i) r_j \\
&= \sum_{jk} (\epsilon_{ijk})^2 (r_i p_j - r_j p_i) r_j \\
&= \sum_{j} (1 - \delta_{ij}) (r_i p_j - r_j p_i) r_j \\
&= r_i (\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{r}) - r^2 p_i - (r_i p_i - r_i p_i) r_i \\
&= r_i (\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{r}) - r^2 p_i
\end{aligned} \tag{11}$$

であること、（途中で $\sum_{mn} \epsilon_{kmn} r_m r_n = 0$ を用いていた。）さらに、

$$\sum_l \left(-\frac{\kappa \delta_{li}}{r} + \frac{\kappa r_i r_l}{r^3} \right) p_l = -\frac{\kappa p_i}{r} + \frac{\kappa r_i (\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{r})}{r^3} \tag{12}$$

が成立する。

以上の式を代入することにより、

$$
\begin{aligned}
\frac{dM_i}{dt} &= \{M_i, H\} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{13}
$$

となり、LRL ベクトルが保存されることが示された。

4　LRL ベクトルの大きさ

まず、

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L})^2 &= \left(\boldsymbol{r}p^2 - \boldsymbol{p}(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{p})\right)^2 \\
&= r^2p^4 - p^2(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{p})^2
\end{aligned} \tag{14}
$$

$$
\begin{aligned}
L^2 &= (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}) \cdot \boldsymbol{L} \\
&= \boldsymbol{r} \cdot (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L}) \\
&= \boldsymbol{r} \cdot (\boldsymbol{p} \times (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p})) \\
&= \boldsymbol{r} \cdot (\boldsymbol{r}p^2 - \boldsymbol{p}(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{p})) \\
&= r^2p^2 - (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{p})^2
\end{aligned} \tag{15}
$$

などとなる。

以上より、

$$
\begin{aligned}
M^2 &= \frac{1}{m^2}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L})^2 - 2\frac{\kappa}{m}\frac{(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L})\cdot\boldsymbol{r}}{r} + \kappa^2 \\
&= \frac{1}{m^2}\left(r^2p^4 - p^2(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p})^2\right) - 2\frac{\kappa}{m}\frac{r^2p^2-(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p})^2}{r} + \kappa^2 \\
&= \frac{1}{m^2}\left(r^2p^4 - p^2(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p})^2\right) \\
&\quad + \frac{1}{m}\left(2H - \frac{p^2}{m}\right)\left(r^2p^2-(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p})^2\right) + \kappa^2 \\
&= \frac{2HL^2}{m} + \kappa^2
\end{aligned}
\tag{16}
$$

となる。

5 LRL ベクトルと角運動量ベクトルの直交性

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{L} &= \frac{1}{m}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L})\cdot\boldsymbol{L} - \kappa\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{L}}{r} \\
&= \frac{1}{m}(\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{L})\cdot\boldsymbol{p} - \kappa\frac{(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{p}}{r} \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{17}
$$

となり、LRL ベクトルと角運動量ベクトルは直交する。$\boldsymbol{L}$ は運動している面（$\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{p}$ が張るベクトルがなす面）に直交することから、$\boldsymbol{M}$ は運動している面にあることがわかる。

6　離心率と LRL ベクトルの関係

$\boldsymbol{r}$ が $\boldsymbol{M}$ と成す角を θ とする。

$$\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{r} = rM\cos\theta \tag{18}$$

となる。一方、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{r} &= \frac{1}{m}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L})\cdot\boldsymbol{r} - \kappa r \\ &= \frac{L^2}{m} - \kappa r\end{aligned}$$

となる。

よって、

$$r = \frac{L^2}{(M\cos\theta+\kappa)m}$$

すなわち

$$\frac{1}{r} = \frac{\kappa m}{L^2}\left(\frac{M}{\kappa}\cos\theta + 1\right) \tag{19}$$

となる。

■引力の場合、すなわち $\kappa > 0$ の場合

式 19 は原点、すなわちポテンシャル中心を焦点とする円錐

曲線の方程式となっている。ここで、

$$p := \frac{L^2}{\kappa m} \tag{20}$$

は通径と呼ばれる量であり、

$$\begin{aligned} e &:= \frac{M}{\kappa} \\ &= \frac{1}{\kappa}\sqrt{\frac{2HL^2}{m} + \kappa^2} \\ &= \sqrt{\frac{2HL^2}{\kappa^2 m} + 1} \end{aligned}$$

は離心率と呼ばれる量である。すなわち、LRL ベクトルの大きさは離心率に関係がある。ちなみに、

- $H > 0$ のときに $e > 1$ となり双曲線上の運動
- $H = 0$ のときに $e = 1$ となり放物線上の運動
- $H < 0$ のときに $0 \leq e < 1$ となり楕円（あるいは真円）上の運動

となっている。$\theta = 0$ となるとき、r は最小となり、軌道が近日点を通ることがわかる。したがって、LRL ベクトルの方向はポテンシャル中心から近日点を向く方向となっていることがわかる。

■斥力の場合、すなわち $\kappa < 0$ の場合

　つねに $H > 0$ となり、双曲線上の運動となる。式 19 は、

$$\frac{1}{r} = \frac{|\kappa| m}{L^2} \left(\frac{M}{|\kappa|} \cos\theta - 1 \right) \tag{21}$$

のように書き直される。離心率は、

$$e := \frac{M}{|\kappa|} = \sqrt{\frac{2HL^2}{\kappa^2 m} + 1} \tag{22}$$

で、通径は

$$p := \frac{L^2}{|\kappa| m} \tag{23}$$

となる。やはり、近日点は $\theta = 0$ のときで、LRL ベクトルの方向はポテンシャル中心から近日点を向く方向となっていることがわかる。