ケプラー問題と力学的対称性（その２）

adhara*

2017 年 9 月 20 日

目次

1 はじめに 2

2 目標の式の導出 4

2.1 $\{L_i, L_j\} = \sum_k \epsilon_{ijk} L_k$ の導出 4

2.2 $\{M_i, M_j\} = -\frac{2H}{m} \sum_k \epsilon_{ijk} L_k$ の導出 5

2.3 $\{L_i, M_j\} = \sum_k \epsilon_{ijk} M_k$ の導出 12

* Twitter @adhara_mathphys

1　はじめに

　ケプラー問題のハミルトニアン

$$H(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}) = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} - \frac{\kappa}{r} \tag{1}$$

について考えている。
　角運動量ベクトルは

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p} \tag{2}$$

で定義され、Laplace-Runge-Lenz ベクトルは

$$\boldsymbol{M} = \frac{1}{m}\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L} - \frac{\kappa \boldsymbol{r}}{r}$$

で定義される。（記号 $\times$ は外積）外積の演算により、各成分は $i = x, y, z$ として、

$$\begin{aligned} L_i &= \sum_{j=x,y,z} \sum_{k=x,y,z} \epsilon_{ijk} r_j p_k \\ M_i &= \frac{1}{m} \sum_{j=x,y,z} \sum_{k=x,y,z} \epsilon_{ijk} p_j L_k - \frac{\kappa r_i}{r} \end{aligned} \tag{3}$$

となっている。（$\epsilon_{xyz} = \epsilon_{yzx} = \epsilon_{zxy} = -\epsilon_{yxz} = -\epsilon_{xzy} = -\epsilon_{zyx} = 1$）

このノートの目標は

$$\{L_i, L_j\} = \sum_k \epsilon_{ijk} L_k \tag{4}$$

$$\{M_i, M_j\} = -\frac{2H}{m} \sum_k \epsilon_{ijk} L_k \tag{5}$$

$$\{L_i, M_j\} = \sum_k \epsilon_{ijk} M_k \tag{6}$$

を示すことである。ただし、ポアソンブラケットの演算は

$$\{A, B\} = \sum_i \left[\frac{\partial A}{\partial r_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial r_i} \right] \tag{7}$$

と定義している。（本や論文によって符号が逆の定義のときがある。）

2　目標の式の導出

2.1　$\{L_i, L_j\} = \sum_k \epsilon_{ijk} L_k$ の導出

$$
\begin{aligned}
\{L_i, L_j\} &= \sum_m \sum_n \sum_{m'} \sum_{n'} \epsilon_{imn}\epsilon_{jm'n'}\{r_m p_n, r_{m'} p_{n'}\} \\
&= \sum_m \sum_n \sum_{m'} \sum_{n'} \sum_l \epsilon_{imn}\epsilon_{jm'n'} \\
&\times \left[\frac{\partial r_m p_n}{\partial r_l}\frac{\partial r_{m'} p_{n'}}{\partial p_l} - \frac{\partial r_m p_n}{\partial p_l}\frac{\partial r_{m'} p_{n'}}{\partial r_l}\right] \\
&= \sum_m \sum_n \sum_{m'} \sum_{n'} \sum_l \epsilon_{imn}\epsilon_{jm'n'} \\
&\times \left[\delta_{ml} p_n \delta_{n'l} r_{m'} - r_m \delta_{nl} \delta_{m'l} p_{n'}\right] \\
&= \sum_m \sum_n \sum_{m'} \sum_{n'} \sum_l \\
&\times \left[\epsilon_{iln}\epsilon_{jm'l}\delta_{ml} p_n \delta_{n'l} r_{m'} - \epsilon_{iml}\epsilon_{jln'} r_m \delta_{nl} \delta_{m'l} p_{n'}\right] \\
&= \sum_m \sum_n \sum_l \left[\epsilon_{iml}\epsilon_{jnl} - \epsilon_{inl}\epsilon_{jml}\right] r_m p_n \\
&= \sum_m \sum_n \sum_l \epsilon_{ijl}\epsilon_{mnl} r_m p_n \\
&= \sum_l \epsilon_{ijl} L_l
\end{aligned} \tag{8}
$$

となる。ただし、最後から二番目の式変形では

$$\epsilon_{iml}\epsilon_{jnl} - \epsilon_{inl}\epsilon_{jml} = \epsilon_{ijl}\epsilon_{mnl} \tag{9}$$

を用いた。（この変形はこのノートでしばしば用いられる。）

2.2 $\{M_i, M_j\} = -\frac{2H}{m}\sum_k \epsilon_{ijk} L_k$ の導出

まず、

$$\begin{aligned}
&\{M_i, M_j\} \\
&= \left\{ \frac{1}{m}\sum_m \sum_n \epsilon_{imn} p_m L_n - \frac{\kappa r_i}{r}, \frac{1}{m}\sum_{m'}\sum_{n'} \epsilon_{jm'n'} p_{m'} L_{n'} - \frac{\kappa r_j}{r} \right\} \\
&= \frac{1}{m^2}\sum_m \sum_n \sum_{m'} \sum_{n'} \epsilon_{imn}\epsilon_{jm'n'} \{p_m L_n, p_{m'} L_{n'}\} \\
&- \frac{\kappa}{m}\sum_m \sum_n \epsilon_{imn} \left\{ p_m L_n, \frac{r_j}{r} \right\} \\
&+ \frac{\kappa}{m}\sum_m \sum_n \epsilon_{jmn} \left\{ p_m L_n, \frac{r_i}{r} \right\} \\
&+ \kappa^2 \left\{ \frac{r_i}{r}, \frac{r_j}{r} \right\}
\end{aligned} \tag{10}$$

である。

■式 10 最終辺第一項

式 10 最終辺第一項のポアソンブラケット演算は、

$$
\begin{aligned}
&\{p_m L_n, p_{m'} L_{n'}\} \\
&= \sum_l \left[\frac{\partial p_m L_n}{\partial r_l} \frac{\partial p_{m'} L_{n'}}{\partial p_l} - \frac{\partial p_m L_n}{\partial p_l} \frac{\partial p_{m'} L_{n'}}{\partial r_l} \right] \\
&= \sum_l \sum_s \sum_t \sum_{s'} \sum_{t'} \epsilon_{nst} \epsilon_{n's't'} \\
&\times \left[\frac{\partial p_m r_s p_t}{\partial r_l} \frac{\partial p_{m'} r_{s'} p_{t'}}{\partial p_l} - \frac{\partial p_m r_s p_t}{\partial p_l} \frac{\partial p_{m'} r_{s'} p_{t'}}{\partial r_l} \right] \\
&= \sum_l \sum_s \sum_t \sum_{s'} \sum_{t'} \epsilon_{nst} \epsilon_{n's't'} \\
&\times [\delta_{sl} p_m p_t r_{s'} (p_{m'} \delta_{t'l} + p_{t'} \delta_{m'l}) - r_s (p_m \delta_{tl} + p_t \delta_{ml}) p_{m'} p_{t'} \delta_{ls'}] \\
&= \sum_s \sum_t \sum_{s'} \sum_{t'} \epsilon_{nst} \epsilon_{n's't'} \\
&\times [p_m p_t r_{s'} (p_{m'} \delta_{t's} + p_{t'} \delta_{m's}) - p_{m'} p_{t'} r_s (p_m \delta_{ts'} + p_t \delta_{ms'})] \\
&= \sum_s \sum_t \sum_{s'} (\epsilon_{nss'} \epsilon_{n'ts'} - \epsilon_{nts'} \epsilon_{n'ss'}) p_m p_{m'} p_t r_s \\
&+ \sum_t \sum_t \sum_{s'} (\epsilon_{nm't'} \epsilon_{n'st} p_m - \epsilon_{nst} \epsilon_{n'mt'} p_{m'}) p_t p_{t'} r_s
\end{aligned}
\tag{11}
$$

となる。

式 11 最終辺の第一項は、

$$\sum_s \sum_t \sum_{s'} (\epsilon_{nss'}\epsilon_{n'ts'} - \epsilon_{nts'}\epsilon_{n'ss'}) p_m p_{m'} p_t r_s$$
$$= \sum_s \sum_t \sum_{s'} \epsilon_{nn's'}\epsilon_{sts'} p_m p_{m'} p_t r_s \tag{12}$$

したがって、式 10 最終辺第一項は

$$\frac{1}{m^2} \sum_m \sum_n \sum_{m'} \sum_{n'} \epsilon_{imn}\epsilon_{jm'n'} \{p_m L_n, p_{m'} L_{n'}\}$$
$$= \frac{1}{m^2} \sum_{nmn'm'} \sum_{sts'} \epsilon_{imn}\epsilon_{jm'n'}\epsilon_{nn's'}\epsilon_{sts'} p_m p_{m'} p_t r_s$$
$$+ \frac{1}{m^2} \sum_{nmn'm'} \sum_{sts'} \epsilon_{imn}\epsilon_{jm'n'} (\epsilon_{nm't'}\epsilon_{n'st} p_m - \epsilon_{nst}\epsilon_{n'mt'} p_{m'}) p_t p_{t'} r_s \tag{13}$$

式 13 最終辺の第一項は

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{m^2}\sum_{nmn'm'}\sum_{sts'}\epsilon_{imn}\epsilon_{jm'n'}\epsilon_{nn's'}\epsilon_{sts'}p_m p_{m'}p_t r_s \\
&=\frac{1}{m^2}\sum_{nst}(\epsilon_{ijn}\epsilon_{jni}\epsilon_{nij}\epsilon_{stj}p_j p_n \\
&+\epsilon_{inj}\epsilon_{jin}\epsilon_{jni}\epsilon_{sti}p_i p_n+\epsilon_{inj}\epsilon_{jni}\epsilon_{jin}\epsilon_{stn}p_n p_n)p_t r_s \\
&=\frac{1}{m^2}\sum_{nst}\epsilon_{ijn}(\epsilon_{stj}p_j p_n+\epsilon_{sti}p_i p_n+\epsilon_{stn}p_n p_n)r_s p_t \\
&=\frac{1}{m^2}\sum_{n}\epsilon_{ijn}(L_j p_j+L_i p_i+L_n p_n)p_n \\
&=\frac{1}{m^2}(\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{p})\sum_{n}\epsilon_{ijn}p_n
\end{aligned}
\tag{14}
$$

式 13 最終辺第二項は

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{m^2}\sum_{nmn'm'}\sum_{sts'}\epsilon_{imn}\epsilon_{jm'n'}(\epsilon_{nm't'}\epsilon_{n'st}p_m-\epsilon_{nst}\epsilon_{n'mt'}p_{m'})p_t p_{t'}r_s \\
&=\frac{1}{m^2}\sum_{nst}\{\epsilon_{ijn}\epsilon_{jin}(\epsilon_{nij}\epsilon_{nst}p_j p_t p_j r_s-\epsilon_{nst}\epsilon_{nji}p_i p_t p_i r_s) \\
&+\epsilon_{ijn}\epsilon_{jni}(-\epsilon_{nst}\epsilon_{ijn}p_n p_t p_n r_s)+\epsilon_{inj}\epsilon_{jin}(\epsilon_{jin}\epsilon_{nst}p_n p_t p_n r_s) \\
&+\epsilon_{inj}\epsilon_{jni}(\epsilon_{jni}\epsilon_{ist}p_n p_t p_i r_s-\epsilon_{jst}\epsilon_{inj}p_n p_t p_j r_s)\} \\
&=\frac{1}{m^2}\sum_{nst}\epsilon_{nst}\epsilon_{ijn}\{(-p_j^2-p_i^2-p_n^2)r_s p_t \\
&-\epsilon_{ijn}(\epsilon_{nst}p_n+\epsilon_{ist}p_i+\epsilon_{jst}p_j)p_n r_s p_t\} \\
&=-\frac{1}{m^2}\left(p^2\sum_{n}\epsilon_{ijn}L_n+(\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{p})\sum_{n}\epsilon_{ijn}p_n\right)
\end{aligned}
\tag{15}
$$

以上より式 10 第一項は、

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{m^2}\sum_m\sum_n\sum_{m'}\sum_{n'}\epsilon_{imn}\epsilon_{jm'n'}\left\{p_m L_n, p_{m'} L_{n'}\right\} \\
&= -\frac{1}{m^2}p^2\sum_n\epsilon_{ijn}L_n \qquad (16)
\end{aligned}
$$

となる。

■式 10 最終辺第二項と第三項

まず、

$$
\begin{aligned}
&\sum_{mn} \epsilon_{imn} \left\{ p_m L_n, \frac{r_j}{r} \right\} \\
&= \sum_{mnst} \epsilon_{imn}\epsilon_{nst} \left\{ p_m r_s p_t, \frac{r_j}{r} \right\} \\
&= \sum_{mnstl} \epsilon_{imn}\epsilon_{nst} \left(-\frac{\partial p_m r_s p_t}{\partial p_l} \frac{\partial \frac{r_j}{r}}{\partial r_l} \right) \\
&= \sum_{mnstl} \epsilon_{imn}\epsilon_{nst} \left\{ -(\delta_{ml} r_s p_t + \delta_{tl} r_s p_m) \left(\frac{\delta_{jl}}{r} - \frac{r_j r_l}{r^3} \right) \right\} \\
&= \sum_{mnst} \epsilon_{imn}\epsilon_{nst} \left\{ -\left(\frac{\delta_{jm}}{r} - \frac{r_j r_m}{r^3} \right) r_s p_t - \left(\frac{\delta_{jt}}{r} - \frac{r_j r_t}{r^3} \right) r_s p_m \right\} \\
&= -\frac{1}{r} \sum_{nst} (\epsilon_{ijn}\epsilon_{nst} + \epsilon_{itn}\epsilon_{nsj}) r_s p_t \\
&+ \frac{r_j}{r^3} \sum_{mnst} \epsilon_{imn}\epsilon_{nst} (r_m r_s p_t + r_t r_s p_m) \\
&= -\frac{1}{r} \sum_{n} \epsilon_{ijn} L_n - \frac{1}{r} \sum_{nst} \epsilon_{itn}\epsilon_{nsj} r_s p_t + \frac{r_j}{r^3} \sum_{mn} \epsilon_{imn} r_m L_n \\
&= -\frac{1}{r} \sum_{n} \epsilon_{ijn} L_n - \frac{1}{r} \sum_{nst} \epsilon_{itn}\epsilon_{nsj} r_s p_t + \frac{r_j}{r^3} (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{L})_i \qquad (17)
\end{aligned}
$$

である。途中 $\sum_{nst} r_s r_t = 0$ を使った。

これを用いると式 10 最終辺第二項と第三項は、

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\kappa}{m}\sum_m\sum_n \epsilon_{imn}\left\{p_m L_n, \frac{r_j}{r}\right\} + \frac{\kappa}{m}\sum_m\sum_n \epsilon_{jmn}\left\{p_m L_n, \frac{r_i}{r}\right\} \\
&= \frac{\kappa}{m}\Bigg\{ -\frac{2}{r}\sum_n \epsilon_{ijn}L_n - \frac{1}{r}\sum_{nst}(\epsilon_{itn}\epsilon_{nsj} - \epsilon_{jtn}\epsilon_{nsi})r_s p_t \\
&+ \frac{1}{r^3}\left[(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{L})_i r_j - r_i(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{L})_j\right] \Bigg\} \\
&= \frac{\kappa}{m}\Bigg\{ -\frac{2}{r}\sum_n \epsilon_{ijn}L_n - \frac{1}{r}\sum_{nst}\epsilon_{stn}\epsilon_{ijn} r_s p_t \\
&+ \frac{1}{r^3}\sum_n \epsilon_{ijn}\left[(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{L})\times\boldsymbol{r}\right]_n \Bigg\} \\
&= \frac{\kappa}{m}\Bigg\{ -\frac{2}{r}\sum_n \epsilon_{ijn}L_n - \frac{1}{r}\sum_n \epsilon_{ijn}L_n \\
&+ \frac{1}{r^3}\sum_n \epsilon_{ijn}\left[\boldsymbol{L}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{L})\right]_n \Bigg\} \\
&= \frac{\kappa}{m}\frac{2}{r}\sum_n \epsilon_{ijn}L_n \qquad (18)
\end{aligned}
$$

のようになる。

■式 10 最終辺第四項

式 10 第四項はポアソンブラケットの中に運動量 p が含まれないことからゼロとなる。

■結果

以上より、

$$\{M_i, M_j\} = -\frac{1}{m^2}p^2\sum_n \epsilon_{ijn}L_n + \frac{\kappa}{m}\frac{2}{r}\sum_n \epsilon_{ijn}L_n$$
$$= -\frac{2H}{m}\sum_n \epsilon_{ijn}L_n \tag{19}$$

を得る。

2.3 $\{L_i, M_j\} = \sum_k \epsilon_{ijk}M_k$ の導出

まず、

$$\begin{aligned}
&\{L_i, M_j\}\\
&= \sum_{mn}\epsilon_{imn}\left\{r_m p_n, \frac{1}{m}\sum_{st}\epsilon_{jst}p_s L_t - \frac{\kappa r_j}{r}\right\}\\
&= \sum_{mn}\epsilon_{imn}\left\{r_m p_n, \frac{1}{m}\sum_{stuv}\epsilon_{jst}\epsilon_{tuv}p_s r_u p_v - \frac{\kappa r_j}{r}\right\}\\
&= \frac{1}{m}\sum_{mnstuv}\epsilon_{imn}\epsilon_{jst}\epsilon_{tuv}\{r_m p_n, p_s r_u p_v\} - \kappa\sum_{mn}\epsilon_{imn}\left\{r_m p_n, \frac{r_j}{r}\right\}
\end{aligned} \tag{20}$$

が成立する。

■式 20 最終辺第一項

式 20 最終辺第一項は、

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{m}\sum_{mnstuv}\epsilon_{imn}\epsilon_{jst}\epsilon_{tuv}\{r_m p_n, p_s r_u p_v\} \\
&= \frac{1}{m}\sum_{mnstuvl}\epsilon_{imn}\epsilon_{jst}\epsilon_{tuv}\left[\frac{\partial r_m p_n}{\partial r_l}\frac{\partial p_s r_u p_v}{\partial p_l} - \frac{\partial r_m p_n}{\partial p_l}\frac{\partial p_s r_u p_v}{\partial r_l}\right] \\
&= \frac{1}{m}\sum_{mnstuvl}\epsilon_{imn}\epsilon_{jst}\epsilon_{tuv} \\
&\times [\delta_{ml}(\delta_{sl}p_v + \delta_{vl}p_s)r_u p_n - \delta_{nl}\delta_{ul}r_m p_s p_v] \\
&= \frac{1}{m}\sum_{mntuv}\epsilon_{imn}\left(\epsilon_{jmt}\epsilon_{tuv}p_n r_u + \epsilon_{jvt}\epsilon_{tum}p_n r_u - \epsilon_{jut}\epsilon_{tnv}p_u r_m\right)p_v
\end{aligned}
\tag{21}
$$

となる。

(1) $i=j$ のとき

式 21 は

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{m}\sum_{mntuv}\epsilon_{imn}\left(\epsilon_{imt}\epsilon_{tuv}p_n r_u+\epsilon_{ivt}\epsilon_{tum}p_n r_u-\epsilon_{iut}\epsilon_{tnv}p_u r_m\right)p_v \\
&=\frac{1}{m}\sum_{mnuv}\Bigg(\epsilon_{imn}\epsilon_{imn}\epsilon_{nuv}p_n r_u p_v+\epsilon_{imn}\epsilon_{ivn}\epsilon_{num}p_n r_u p_v \\
&-\epsilon_{imn}\epsilon_{ium}\epsilon_{mnv}r_m p_u p_v\Bigg) \\
&=\frac{1}{m}\sum_{mn}\left[(\epsilon_{imn})^2 p_n L_n+\epsilon_{imn}r_i p_n p_m+\epsilon_{imn}r_m p_n p_i\right] \\
&=\left(\sum_n(1-\delta_{ni})p_n L_n+L_i p_i\right) \\
&=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{L} \\
&=0
\end{aligned}
\tag{22}
$$

となる。

(2) $i \neq j$ のとき

式 21 は

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{m}\Bigg\{\sum_{muv}\epsilon_{imj}\epsilon_{jmi}\epsilon_{iuv}p_j r_u p_v+\sum_{tnv}\epsilon_{ijn}\epsilon_{jvt}\epsilon_{tvj}r_v p_v p_n\\
&+\sum_{n}\epsilon_{inj}\epsilon_{jni}\epsilon_{ijn}r_j p_j p_m-\sum_{n}\epsilon_{ijn}\epsilon_{jni}\epsilon_{inj}r_j p_n p_j\\
&-\sum_{nut}\epsilon_{inj}\epsilon_{jut}\epsilon_{tju}r_n p_u p_u\Bigg\}\\
&=\frac{1}{m}\Bigg\{-L_i p_j-\sum_{n}\epsilon_{ijn}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p})p_n\\
&+\sum_{n}\epsilon_{ijn}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p})r_n+\sum_{n}\epsilon_{ijn}(r_j p_n-r_n p_j)p_j\Bigg\}\\
&=\frac{1}{m}\Bigg\{-L_i p_j+\sum_{n}\epsilon_{ijn}\left[(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p})\boldsymbol{r}-(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p})\boldsymbol{p}\right]_n+L_i p_j\Bigg\}\\
&=\frac{1}{m}\sum_{n}\epsilon_{ijn}\left[\boldsymbol{p}\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})\right]_n\\
&=\frac{1}{m}\sum_{n}\epsilon_{ijn}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L})_n \qquad (23)
\end{aligned}
$$

となる。

第一項まとめ

以上より、式 20 最終辺の第一項は、

$$\frac{1}{m}\sum_{mnstuv}\epsilon_{imn}\epsilon_{jst}\epsilon_{tuv}\{r_m p_n, p_s r_u p_v\} = \frac{1}{m}\sum_{n}\epsilon_{ijn}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L})_n \tag{24}$$

となる。

■式 20 最終辺の第二項

第二項は、

$$\begin{aligned}
&-\kappa\sum_{mn}\epsilon_{imn}\left\{r_m p_n, \frac{r_j}{r}\right\} \\
&= \kappa\sum_{mnl}\epsilon_{imn}\frac{\partial r_m p_n}{\partial p_l}\frac{\partial \frac{r_j}{r}}{\partial r_l} \\
&= \kappa\sum_{mnl}\epsilon_{imn}r_m\delta_{nl}\left(\frac{\delta_{jl}}{r}-\frac{r_j r_l}{r^3}\right) \\
&= \kappa\sum_{mn}\epsilon_{imn}r_m\left(\frac{\delta_{jn}}{r}-\frac{r_j r_n}{r^3}\right) \\
&= -\kappa\sum_{m}\epsilon_{ijm}\frac{r_m}{r}
\end{aligned} \tag{25}$$

途中で $\sum_{mn}\epsilon_{imn}r_m r_n = 0$ を使っている。

■結果

以上より、

$$
\begin{aligned}
\{L_i, M_j\} &= \frac{1}{m}\sum_n \epsilon_{ijn}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L})_n - \kappa\sum_m \epsilon_{ijm}\frac{r_m}{r} \\
&= \sum_n \epsilon_{ijn}\left[\frac{1}{m}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L}) - \kappa\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right]_n \\
&= \sum_n \epsilon_{ijn} M_n
\end{aligned} \tag{26}
$$

が求まった。