ケプラー問題と力学的対称性（その４）

adhara*

2017 年 1 月 5 日

1　はじめに

ケプラー問題のハミルトニアン

$$H(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}) = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} - \frac{\kappa}{r} \tag{1}$$

について考えている。

角運動量ベクトルは

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p} \tag{2}$$

* Twitter @adhara_mathphys

で定義され、Laplace-Runge-Lenz ベクトルは

$$\boldsymbol{M} = \frac{1}{m}\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L} - \frac{\kappa \boldsymbol{r}}{r}$$

で定義される。（記号 $\times$ は外積）

　このとき、

$$\frac{dH}{dt} = 0 \tag{3}$$
$$\frac{dL_i}{dt} = \{L_i, H\} = 0 \tag{4}$$
$$\frac{dM_i}{dt} = \{M_i, H\} = 0 \tag{5}$$

であることは別のノートで示している。すなわち、ハミルトニアン自身と角運動量ベクトル・LRL ベクトルの各成分はすべて運動の第一積分である。

　さらに

$$\{L_i, L_j\} = \sum_k \epsilon_{ijk} L_k \tag{6}$$
$$\{M_i, M_j\} = -\frac{2H}{m} \sum_k \epsilon_{ijk} L_k \tag{7}$$
$$\{L_i, M_j\} = \sum_k \epsilon_{ijk} M_k \tag{8}$$

であり束縛状態 $H < 0$ においては、

$$\tilde{\boldsymbol{M}} = \sqrt{\frac{m}{-2H}}\boldsymbol{M} \tag{9}$$

を導入することにより、

$$\{L_i, L_j\} = \sum_k \epsilon_{ijk} L_k \tag{10}$$

$$\{\tilde{M}_i, \tilde{M}_j\} = \sum_k \epsilon_{ijk} L_k \tag{11}$$

$$\{L_i, \tilde{M}_j\} = \sum_k \epsilon_{ijk} \tilde{M}_k \tag{12}$$

が成立し、$\boldsymbol{L}$, $\tilde{\boldsymbol{M}}$ の各成分は $so(4)$ 代数の基底を成すことが分かる。

本ノートではポアソンブラケットの演算は

$$\{A, B\} = \sum_i \left[\frac{\partial A}{\partial r_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial r_i} \right] \tag{13}$$

と定義している。（本や論文によって符号が逆の定義のときがある。）

さらに両ベクトルの直交性に関する関係式

$$\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{L} = 0 \tag{14}$$

や LRL ベクトルの大きさに関する関係式

$$M^2 = \frac{2HL^2}{m} + \kappa^2 \tag{15}$$

が成立する。

2 問題の二次元化

球対称性のために運動は平面内に限られる。平面は単位法線ベクトルによって指定される。運動の平面を指定した時点で運動の自由度は 2 だけ減るということである。すなわち、$6 - 2 = 4$ 次元位相空間中の運動の問題となったということである。ここでは、運動の平面を xy 平面であるとしよう。

2.1 二次元版の角運動量と LRL ベクトル

この時角運動量 (ベクトルではなくスカラーとなる) と LRL ベクトル (二次元ベクトルとなる) を三次元の時と同様に導入することができる。角運動量 L は元の三次元系の L_z であり、

$$L := L_z = xp_y - yp_x \tag{16}$$

と定義される。LRL ベクトルは

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} M_x & M_y \end{pmatrix} \tag{17}$$

のように定義することが出来る。

これらが運動の第一積分である事実は変わらないことを指摘しておく。

2.2 $so(3)$ 代数を構成できること

LRL ベクトルの規格化 9 を用いると、

$$
\begin{aligned}
\left\{\tilde{M}_x, \tilde{M}_y\right\} &= L_z \\
\left\{L, \tilde{M}_x\right\} &= \tilde{M}_y \\
\left\{\tilde{M}_y, L\right\} &= \tilde{M}_x
\end{aligned}
\tag{18}
$$

が成立する。このブラケット演算の関係式より、この 3 つの演算子は $so(3)$ 代数の基底となっていることが分かる。

3 第一積分

3.1 独立な 3 つの第一積分

先に触れたようにハミルトン形式解析力学の立場では、二次元系における運動状態の変化は 4 次元位相空間中の軌跡 $(x(t), y(t), p_x(t), p_y(t))$ として記述できる。第一積分の数は位相空間中の軌跡に対する拘束条件の数である。（運動状態が一定でなければ）独立な第一積分の個数は 3 個である。独立な第一積分の数が 4 個あるとすると独立な拘束条件が 4 つあることになり運動状態が変化できない。

天下り式ではあるがこの二次元ケプラー問題においては 3

個の独立な第一積分が存在することを示す。ハミルトニアン H と角運動量 L が独立な第一積分であることはすぐに分かる。式 15 より LRL ベクトルの大きさ M は H, L で表されるので、M_x, M_y, H, L の四変数の組が独立ではないこともすぐに分かる。もう一つの独立な第一積分はいろいろ取り方があり、例えば M_x を取ることは可能である。他の取り方としては LRL ベクトルの方向を表す

$$\alpha := \arctan(M_y/M_x)$$

があり得る。

3.2 第一積分間の関係式

独立な第一積分である H, L, α における関係式を挙げ整理する。α を独立な第一積分として取り上げた理由は「都合の良い関係式」を構成できるからである。

まず保存則として、

$$\begin{aligned}\{L, H\} &= 0 \\ \{\alpha, H\} &= 0\end{aligned} \tag{19}$$

が成立する。第二式は、

$$\{\alpha, H\} = \sum_{i=x,y} \frac{\partial \alpha}{\partial M_i} \{M_i, H\}$$

より従う。

次に正準共役関係式、

$$\{\alpha, L\} = 1 \tag{20}$$

が成立する。

この式は、$t = M_y/M_x$ として、

$$\begin{aligned}\{\alpha, L\} &= (\arctan t)' \{t, L\} \\ &= \frac{1}{1+t^2} \{t, L\}\end{aligned} \tag{21}$$

および

$$\begin{aligned}\{t, L\} &= \frac{\partial t}{\partial M_x} \{M_x, L\} + \frac{\partial t}{\partial M_y} \{M_y, L\} \\ &= -\frac{M_y}{M_x^2}(-M_y) + \frac{1}{M_x} M_x \\ &= 1 + t^2\end{aligned} \tag{22}$$

より従う。本導出では M_x, M_y, L の間の交換関係が使われている。実は $so(3)$ 代数の成立と正準共役関係式の成立には関係性がある。これについては Mukunda の論文（Phys. Rev. 155, 1383 (1967)）に詳しい。

実は L と正準共役となる物理量は $\arctan(y/x)$ などがある。しかしながら α は t と異なる著しい特徴を持つ。それは第一積分でもあるという事実である。したがって、α は L と独立

な第一積分であり、かつ L と正準共役にある特別な物理量なのである。

これら正準共役関係式と保存則の組合せが「都合の良い関係式」である。詳しくは別の機会に議論するが、このような「都合の良い関係式」の成立は、ケプラー問題が特別な可積分系すなわち極大超可積分系である事実を反映したものである。

4　特別な正準座標系で眺めると

4.1　正準変換

正準変換とは位相空間 (Phase Space) におけるハミルトン方程式の形を不変に保つという点で特別な座標変換である。すなわち正準変数 $(r_1, r_2, \cdots, r_n, p_1, p_2, \cdots, p_n)$ を座標変換し新しい変数 $(r'_1, r'_2, \cdots, r'_n, p'_1, p'_2, \cdots, p'_n)$ を得たときに

$$\frac{dr'_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p'_i} \tag{23}$$

$$\frac{dp'_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial r'_i} \tag{24}$$

が成立する場合この座標変換を正準変換と言う。

正準変換となるためには、

$$\left\{r'_i, p'_j\right\} = \sum_k \left[\frac{\partial r'_i}{\partial r_k}\frac{\partial p'_j}{\partial p_k} - \frac{\partial r'_i}{\partial p_k}\frac{\partial p'_j}{\partial r_k}\right] = \delta_{ij} \tag{25}$$

$$\left\{p'_i, p'_j\right\} = 0 \tag{26}$$

$$\left\{r'_i, r'_j\right\} = 0 \tag{27}$$

であれば十分である。この条件が成立したとき、

$$\begin{aligned}
\frac{dr'_i}{dt} &= \{r'_i, H\} \\
&= \sum_k \left[\frac{\partial r'_i}{\partial r_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial r'_i}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial r_k}\right] \\
&= \sum_k \sum_j \left[\frac{\partial r'_i}{\partial r_k}\left(\frac{\partial H}{\partial r'_j}\frac{\partial r'_j}{\partial p_k} + \frac{\partial H}{\partial p'_j}\frac{\partial p'_j}{\partial p_k}\right)\right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial r'_i}{\partial p_k}\left(\frac{\partial H}{\partial r'_j}\frac{\partial r'_j}{\partial r_k} + \frac{\partial H}{\partial p'_j}\frac{\partial p'_j}{\partial r_k}\right)\right] \\
&= \sum_j \left[\frac{\partial H}{\partial r'_j}\left\{r'_i, r'_j\right\} + \frac{\partial H}{\partial p'_j}\left\{r'_i, p'_j\right\}\right] \\
&= \frac{\partial H}{\partial p'_i}
\end{aligned} \tag{28}$$

、および

$$
\begin{aligned}
\frac{dp'_i}{dt} &= \{p'_i, H\} \\
&= \sum_k \left[\frac{\partial p'_i}{\partial r_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial p'_i}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial r_k} \right] \\
&= \sum_k \sum_j \left[\frac{\partial p'_i}{\partial r_k} \left(\frac{\partial H}{\partial r'_j} \frac{\partial r'_j}{\partial p_k} + \frac{\partial H}{\partial p'_j} \frac{\partial p'_j}{\partial p_k} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial p'_i}{\partial p_k} \left(\frac{\partial H}{\partial r'_j} \frac{\partial r'_j}{\partial r_k} + \frac{\partial H}{\partial p'_j} \frac{\partial p'_j}{\partial r_k} \right) \right] \\
&= \sum_j \left[\frac{\partial H}{\partial r'_j} \{p'_i, r'_j\} + \frac{\partial H}{\partial p'_j} \{p'_i, p'_j\} \right] \\
&= -\frac{\partial H}{\partial r'_i}
\end{aligned} \tag{29}
$$

が成立する。

■正準変換の重要な性質

正準変換で結びつく

$$(r_1, r_2, \cdots, r_n, p_1, p_2, \cdots, p_n)$$

と

$$(r'_1, r'_2, \cdots, r'_n, p'_1, p'_2, \cdots, p'_n)$$

という正準変数を考えたとき、前者の正準変数で見たときのポアソン括弧演算と後者の正準変数で見たときのポアソン括

弧演算は一致する。すなわち、

$$\{A,B\}_{old} := \sum_k \left[\frac{\partial A}{\partial r_k}\frac{\partial B}{\partial p_k} - \frac{\partial A}{\partial p_k}\frac{\partial B}{\partial r_k}\right] \tag{30}$$

$$\{A,B\}_{new} := \sum_k \left[\frac{\partial A}{\partial r'_k}\frac{\partial B}{\partial p'_k} - \frac{\partial A}{\partial p'_k}\frac{\partial B}{\partial r'_k}\right] \tag{31}$$

としたときに

$$\{A,B\}_{old} = \{A,B\}_{new} \tag{32}$$

が成立する。

4.2　ケプラー問題への正準変換の適用

ケプラー問題においては独立な第一積分である H, L, α に加えて Q という物理量を導入したときこれらを正準変数に取ることができる。ここで Q は

$$\{Q,H\} = 1,\ \{Q,\alpha\} = \{Q,L\} = 0 \tag{33}$$

を満たす物理量である。つまり、Q は H に共役な物理量である。

ハミルトニアン H は上記の正準座標系では H のみの変数である。これは α, L, Q に関するハミルトン方程式を書き下

すと、

$$\frac{\partial \alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial L} \tag{34}$$

$$\frac{\partial L}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \alpha} \tag{35}$$

$$\frac{\partial H}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial Q} \tag{36}$$

であり左辺が 0 であることから分かる。

　では Q とはいかなる物理量であろうか？ここで Q に関するハミルトン方程式を書き下すと、

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial H}{\partial H} = 1 \tag{37}$$

となる。したがって、Q は時間に比例する物理量であることが分かる。すなわちケプラー問題では束縛状態は周期的運動となるので Q は多価関数であることもわかる。