ラゲール陪多項式の直交性

adhara*

2016 年 12 月 23 日

ラゲール陪関数は

$$
\begin{aligned}
L_n^k(x) &= (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} L_{n+k}(x) \\
&= (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \sum_{m=0}^{n+k} x^m (-1)^m \frac{(n+k)!}{m!m!(n+k-m)!} \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \ {}_nP_{n-m} \ {}_{n+k}C_{n-m} x^m \qquad (1)
\end{aligned}
$$

と表される。

* Twitter @adhara_mathphys

このことから、

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty dx\ e^{-x} x^k L_n^k(x) L_m^k(x) \\
&= \sum_{l=0}^{n} \sum_{s=0}^{m} (-1)^{l+s} {}_{l+s}C_s\ {}_{k+l+s}P_k\ {}_{n+k}C_{n-l}\ {}_{m+k}C_{m-s} \\
&= \sum_{s=0}^{m} {}_{k+s}P_k\ {}_{m+k}C_{m-s} \sum_{l=0}^{n} (-1)^{l+s} {}_{l+s+k}C_l\ {}_{n+k}C_{n-l}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

が成立する。

$k \geq 1$ とすると、

$$
\begin{aligned}
&\sum_{l=0}^{n} (-1)^{l+s} {}_{l+s+k}C_{l}\ {}_{n+k}C_{n-l} \\
&= \sum_{l=0}^{n} (-1)^{l+s} {}_{l+s+k}C_{s+k}\ {}_{n+k}C_{l+k} \\
&= \sum_{l=0}^{n} (-1)^{l+s} {}_{l+s+k}C_{s+k}\ \left({}_{n+k-1}C_{l+k} + {}_{n+k-1}C_{l+k-1}\right) \\
&= \sum_{l=0}^{n} (-1)^{l+s} {}_{l+s+k}C_{s+k}\ {}_{n+k-1}C_{l+k-1} \\
&+ \sum_{l=0}^{n} (-1)^{l+s+1} {}_{l+s+k-1}C_{s+k}\ {}_{n+k-1}C_{l+k-1} \\
&= \sum_{l=0}^{n} (-1)^{l+s} {}_{l+s+k}C_{s+k}\ {}_{n+k-1}C_{l+k-1} \\
&+ \sum_{l=0}^{n} (-1)^{l+s+1} \left({}_{l+s+k}C_{s+k} - {}_{l+s+k-1}C_{s+k-1}\right) {}_{n+k-1}C_{l+k-1} \\
&= \sum_{l=0}^{n} (-1)^{l+s} {}_{l+s+k-1}C_{s+k-1}\ {}_{n+k-1}C_{l+k-1} \\
&= \sum_{l=0}^{n} (-1)^{l+s} {}_{l+s+k-1}C_{s+k-1}\ {}_{n+k-1}C_{n-l} \qquad (3)
\end{aligned}
$$

となる。したがって、任意の 0 以上の整数 k について、

$$\sum_{l=0}^{n}(-1)^{l+s}{}_{l+s+k}C_{l}\ {}_{n+k}C_{n-l}=\sum_{l=0}^{n}(-1)^{l+s}{}_{l+s}C_{l}\ {}_{n}C_{n-l} \tag{4}$$

が言える。

すなわち、

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty dx\ e^{-x}x^kL_n^k(x)L_m^k(x)\\&=\sum_{s=0}^{m}{}_{k+s}P_k\ {}_{m+k}C_{m-s}\sum_{l=0}^{n}(-1)^{l+s}{}_{l+s}C_{l}\ {}_{n}C_{n-l}\end{aligned} \tag{5}$$

が成立する。

次に非負整数 $n,s\geq 0$ に対して、

$$\sum_{l=0}^{n}(-1)^{l+s}{}_{l+s}C_{l}\ {}_{n}C_{n-l}=(-1)^{s-n}{}_{s}C_{n} \tag{6}$$

を示す。ただし、$s<n$ または $n<0$ のときは、${}_sC_n=0$ と定義されているものとする。

左辺を $X(n,s)$ と書く。$s=0$ のときは、

$$X(n,0)=\sum_{l=0}^{n}(-1)^{l}{}_{n}C_{l}=\delta_{n0}$$

より、目的式は成立している。

任意の $s > 0$ に対して、

$$X(0,s) = (-1)^s$$

となるので、$n=0$ のときは、目的の式 $X(n,s) = (-1)^{s-n}{}_sC_n$ は成立する。

$0 \leq k \leq n$ を満たす全ての整数 k に対して、任意の $s > 0$ をとったときに、

$$X(k,s) = (-1)^{s-k}{}_sC_k$$

が成立していると仮定する。（すなわち、n に対する条件を仮定した。）

このとき、任意の $s > 0$ に対して、

$$
\begin{aligned}
X(n+1,s) &= \sum_{l=0}^{n+1}(-1)^{l+s}{}_{l+s}C_l\ {}_{n+1}C_l \\
&= \sum_{l=0}^{n+1}(-1)^{l+s}{}_{l+s}C_l({}_nC_l + {}_nC_{l-1}) \\
&= X(n,s) + \sum_{l=0}^{n}(-1)^{l+s+1}{}_{l+s+1}C_s\ {}_nC_l \\
&= X(n,s) + \sum_{l=0}^{n}(-1)^{l+s+1}({}_{l+s}C_s + {}_{l+s}C_{s-1}){}_nC_l \\
&= X(n,s) - X(n,s) \\
&+ \sum_{l=0}^{n}(-1)^{l+s-1}({}_{l+s-1}C_{s-1} + {}_{l+s-1}C_{s-2}){}_nC_l \\
&= X(n,s-1) + \sum_{l=0}^{n}(-1)^{l+s-1}{}_{l+s-1}C_{s-2}{}_nC_l \\
&= X(n,s-1) + (-1)X(n,s-2) + X(n,s-3) \\
&+ \cdots + (-1)^{s-1}X(n,0) \\
&= (-1)^{s-(n+1)}\sum_{i=1}^{s}{}_{s-i}C_n \\
&= (-1)^{s-(n+1)}{}_sC_{n+1} \qquad (7)
\end{aligned}
$$

となり、$k = n+1$ のときも

$$X(k,s) = (-1)^{s-k}{}_sC_k \qquad (8)$$

が成立する。よって帰納法により、任意の $n, s \geq 0$ に対して目的式 $X(n,s) = (-1)^{s-n}{}_sC_n$ が成立する。

以上より、

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty dx\ e^{-x} x^k L_n^k(x) L_m^k(x) \\
&= \sum_{s=0}^{m} (-1)^{s-n}{}_{k+s}P_k\ {}_sC_n\ {}_{m+k}C_{s+k} \\
&= {}_{n+k}P_k \sum_{s=0}^{m} (-1)^{s-n}{}_{s+k}C_{n+k}\ {}_{m+k}C_{s+k} \\
&= {}_{m+k}P_k \sum_{s=0}^{n} (-1)^{s-m}{}_{s+k}C_{m+k}\ {}_{n+k}C_{s+k} \\
&= {}_{n+k}P_k\ \delta_{mn}
\end{aligned} \tag{9}
$$

が成立する。第三の等号は左辺が n, m に関して対称であることから生じる。第三辺が 0 でないためには、$n \leq s \leq m$ となる s が存在する必要があり、第四辺が 0 でないためには、$m \leq s \leq n$ となる s が存在する必要がある。この事実より、$m \neq n$ では 0 となることから最後の等号が帰結される。（証明終）