共形変換と光錐の幾何学

adhara_mathphys

2020 年 12 月 26 日

概要

本ノートでは Minkowski 空間 $\mathbb{R}^{3,1}$ における共形変換と Minkowski 空間 $\mathbb{R}^{4,2}$ 中の光錐 $N^{4,2}$ 上の幾何学の関係を解説する．参考にした文献は Mirman[1] と Cordani[2] である．

目次

1　導入

1.1　二つの時空

本ノートにおいては二つの平坦時空が扱われる．空間成分を 3 つ，時間成分を 1 つ持つ Minkowski 空間 $\mathbb{R}^{3,1}$ と空間成分を 4 つ，時間成分を 2 つ持つ Minkowski 空間 $\mathbb{R}^{4,2}$ である．両時空における計量テンソルを $\eta^{(3,1)}, \eta^{(4,2)}$ とする．すなわち，

$$\begin{aligned}\eta^{(3,1)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{diag}(1,1,1,-1) \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\eta^{(4,2)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{diag}(1,1,1,1,-1,-1) \end{aligned} \tag{2}$$

と定義する．また，両時空において $|x|^2$ は

$$x^\mu x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$$

を表す[*1]ものとし，これを x の Minkowski ノルムあるいは単にノルムという．

1.2　光錐

二つの Minkowski 空間 $\mathbb{R}^{p,q}$ 中で光錐（light cone あるいは null cone）というものを定義する．すなわち，

$$N^{p,q} = \{x \in \mathbb{R}^{p,q} | |x|^2 = 0\} \tag{3}$$

を $\mathbb{R}^{p,q}$ 中の光錐と呼ぶ.

1.3　直交群

Minkowski 空間 $\mathbb{R}^{p,q}, (pq \neq 0)$ におけるノルムを保存する一次変換は群をなす．これを直交群 $O(p,q)$ という．すなわち，

$$O(p,q) = \{R \in GL(p+q, \mathbb{R}) | R^T \eta^{(p,q)} R = \eta^{(p,q)}\} \tag{4}$$

*1 このノートでは Einstein の縮約表記をしばしば用いる．

である．

また、$O(p,q)$ のうち行列式が 1 になるもの全体は部分群をなす．これを特殊直交群 $SO(p,q)$ という．すなわち，

$$SO(p,q) = \{R \in O(p,q) | \det(R) = 1\} \tag{5}$$

である．

Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ において同様に定義される特殊直交群 $SO(n)$ 特殊直交群が連結群であるのに対して，$SO(p,q)$ は連結群ではない．恒等変換を含む連結成分を考えると，これは部分群をなし，狭義特殊直交群 $SO^+(p,q)$ と呼ばれる．

1.4 特殊直交群の回転行列表現

Minkowski 空間 $\mathbb{R}^{p,q}$ 上のベクトルに対する回転操作は計量テンソル $\eta^{(p,q)}$ に関するノルムを保つ．すなわち、ベクトル x とその回転操作後のベクトル x' に対して，

$$|x|^2 = |x'|^2$$

が成立する必要がある．

Minkowski 空間のある正規直交基底 $\{e_1, e_2, \cdots, e_{p+q}\}$ を用いて，ベクトル x を $x = e_\nu x^\nu$ で表す．まず，$1 \leq i,j \leq p, i \neq j$ あるいは $p+1 \leq i,j \leq p+q, i \neq j$ とすれば，

$$\begin{aligned} R_{ij}(\theta)(x) &= x + e_i \left\{x^i(\cos\theta - 1) - x^j \sin\theta\right\} + e_j \left\{x^i \sin\theta + x^j(\cos\theta - 1)\right\} \\ &= x + e_i \left\{x_i(\cos\theta - 1) - x_j \sin\theta\right\} + e_j \left\{x_i \sin\theta + x_j(\cos\theta - 1)\right\} \end{aligned} \tag{6}$$

のように $x^i x^j$ 平面上の回転操作を定義できる．

計量の符号が異なる成分が関わる平面に関する回転は Lorentz boost（擬回転）と呼ばれる．$1 \leq i \leq p, p+1 \leq j \leq q$ として，$x^i x^j$ 平面上の Lorentz boost は

$$\begin{aligned} R_{ij}(\theta)(x) &= x + e_i \left\{x^i(\cosh\theta - 1) + x^j \sinh\theta\right\} + e_j \left\{x^i \sinh\theta + x^j(\cosh\theta - 1)\right\} \\ &= x + e_i \left\{x_i(\cosh\theta - 1) - x_j \sinh\theta\right\} + e_j \left\{x_i \sinh\theta - x_j(\cosh\theta - 1)\right\} \end{aligned} \tag{7}$$

によって，$x^j x^i$ 平面上の Lorentz boost は

$$\begin{aligned} R_{ji}(\theta)(x) &= x + e_j \left\{x^j(\cosh\theta - 1) - x^i \sinh\theta\right\} + e_i \left\{-x^j \sinh\theta + x^i(\cosh\theta - 1)\right\} \\ &= x + e_j \left\{-x_j(\cosh\theta - 1) - x_i \sinh\theta\right\} + e_i \left\{x_j \sinh\theta + x_i(\cosh\theta - 1)\right\} \end{aligned} \tag{8}$$

によって，それぞれ定義される．

1.5 直交リー代数 $\mathfrak{so}(p,q)$ の導入

次に $i \neq j, 1 \leq i,j \leq p+q$ として，演算子 L_{ij} を

$$L_{ij} x := \left.\frac{\partial R_{ij}(\theta)(x)}{\partial\theta}\right|_{\theta=0} = -x_j e_i + x_i e_j = -\eta_{jk} x^k e_i + \eta_{ik} x^k e_j \tag{9}$$

で定義する．特に L_{ij} は線形演算子となっている．このとき，

$$R_{ij}(\theta) = \exp(\theta L_{ij}) \tag{10}$$

となっている．基底 $\{e_i\}$ に関して行列表示すると，

$$L_{ij} = \eta_{ik}({E^k}_j)^T - \eta_{jk}({E^k}_i)^T \tag{11}$$

と書ける．但し，${E^i}_j$ は (i,j) 成分が 1 でそれ以外が 0 となっている $p+q$ 次元行列で，T は転置を表す．

ここで交換子の計算

$$\left[({E^i}_j)^T, ({E^k}_l)^T\right] = -\delta^k_j({E^i}_l)^T + \delta^i_l({E^k}_j)^T \tag{12}$$

を用いると，

$$\begin{aligned}
[L_{ij}, L_{kl}] &= \left[(\eta_{i\mu}({E^\mu}_j)^T - \eta_{j\mu}({E^\mu}_i)^T), (\eta_{k\nu}({E^\nu}_l)^T - \eta_{l\nu}({E^\nu}_k)^T)\right] \\
&= \{\eta_{i\mu}\eta_{k\nu}\left(-\delta^\nu_j({E^\mu}_l)^T + \delta^\mu_l({E^\nu}_j)^T\right) + \eta_{i\mu}\eta_{l\nu}\left(-\delta^\mu_k({E^\nu}_j)^T + \delta^\nu_j({E^\mu}_k)^T\right) \\
&+ \eta_{j\mu}\eta_{k\nu}\left(-\delta^\mu_l({E^\nu}_i)^T + \delta^\nu_i({E^\mu}_l)^T\right) + \eta_{j\mu}\eta_{l\nu}\left(-\delta^\nu_i({E^\mu}_k)^T + \delta^\mu_k({E^\nu}_i)^T\right)\} \\
&= \{-\eta_{kj}\eta_{i\mu}({E^\mu}_l)^T + \eta_{il}\eta_{k\nu}({E^\nu}_j)^T - \eta_{ik}\eta_{l\nu}({E^\nu}_j)^T + \eta_{lj}\eta_{i\mu}({E^\mu}_k)^T \\
&- \eta_{jl}\eta_{k\nu}({E^\nu}_i)^T + \eta_{ki}\eta_{j\mu}({E^\mu}_l)^T - \eta_{li}\eta_{j\mu}({E^\mu}_k)^T + \eta_{jk}\eta_{l\nu}({E^\nu}_i)^T\} \\
&= \eta_{ik}L_{jl} - \eta_{jk}L_{il} - \eta_{il}L_{jk} + \eta_{jl}L_{ik}
\end{aligned} \tag{13}$$

となる．一方，L_{ij} の線形結合で形成される行列の集合は線形空間であること，交換子はヤコビ律を満たすことから，L_{ij} の線形結合で形成される行の集合は交換子をリー括弧とするリー代数である．これを $\mathfrak{so}(p,q)$ と書き，直交リー代数と呼ぶ．

1.6 直交代数 $\mathfrak{so}(p,q)$ の微分演算子表現

直交代数 $\mathfrak{so}(p,q)$ の $\mathbb{R}^{p,q}$ 上関数空間上の微分演算子表現を得るためには，

$$L_{ij}x = -x_j e_i + x_i e_j$$

の右辺において，

$$e_i \to \frac{\partial}{\partial x_i}$$

の置き換えを行う．すなわち，

$$\begin{aligned}
M_{ij} &= \eta_{i\mu}x^\mu\frac{\partial}{\partial x^j} - \eta_{j\mu}x^\mu\frac{\partial}{\partial x^i} \\
&= x_i\frac{\partial}{\partial x^j} - x_j\frac{\partial}{\partial x^i}
\end{aligned} \tag{14}$$

を導入すると，

$$\begin{aligned}
\left[\exp(\theta M_{ij})f\right](x) &= f\left(R_{ij}(\theta)(x)\right) \\
&= f\left(\exp(\theta L_{ij})(x)\right)
\end{aligned} \tag{15}$$

となる．

交換子をリーブラケットとして M_{ij} たちの線形結合からなる線形空間はリー代数 $\mathfrak{so}(p,q)$ をなす．ここで，

$$[M_{ij}, M_{kl}] = -\eta_{ik}M_{jl} + \eta_{jk}M_{il} + \eta_{il}M_{jk} - \eta_{jl}M_{ik} \tag{16}$$

となっている．行列表現と微分演算子表現のリー代数同型は $(L_{ij})^T$ と M_{ij} を同一視することによって確認できる．[*2]すなわち，

$$(L_{ij})^T = \eta_{ik}{E^k}_j - \eta_{jk}{E^k}_i = E_{ij} - E_{ji} \tag{17}$$

$$\left[{E^i}_j, {E^k}_l\right] = \delta^k_j {E^i}_l - \delta^i_l {E^k}_j \tag{18}$$

を用いると，

$$\begin{aligned}
[(L_{ij})^T, (L_{kl})^T] &= [(\eta_{i\mu}{E^\mu}_j - \eta_{j\mu}{E^\mu}_i), (\eta_{k\nu}{E^\nu}_l - \eta_{l\nu}{E^\nu}_k)] \\
&= \{\eta_{i\mu}\eta_{k\nu}\left(\delta^\nu_j {E^\mu}_l - \delta^\mu_l {E^\nu}_j\right) + \eta_{i\mu}\eta_{l\nu}\left(\delta^\mu_k {E^\nu}_j - \delta^\nu_j {E^\mu}_k\right) \\
&+ \eta_{j\mu}\eta_{k\nu}\left(\delta^\mu_l {E^\nu}_i - \delta^\nu_i {E^\mu}_l\right) + \eta_{j\mu}\eta_{l\nu}\left(\delta^\nu_i {E^\mu}_k - \delta^\mu_k {E^\nu}_i\right)\} \\
&= \{\eta_{kj}E_{il} - \eta_{il}E_{kj} + \eta_{ik}E_{lj} - \eta_{lj}E_{ik} + \eta_{jl}E_{ki} - \eta_{ki}E_{jl} + \eta_{li}E_{jk} - \eta_{jk}E_{li}\} \\
&= -\eta_{ik}(L_{jl})^T + \eta_{jk}(L_{il})^T + \eta_{il}(L_{jk})^T - \eta_{jl}(L_{ik})^T
\end{aligned} \tag{19}$$

となっており，同型であることがわかる．

また，

$$[M_{\mu\nu}, x_\rho] = \left[x_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} - x_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, x^i \eta_{i\rho}\right] = -\eta_{\mu\rho}x_\nu + \eta_{\nu\rho}x_\mu \tag{20}$$

が成立することがわかる．

1.7 共形変換リー代数 $\mathfrak{c}(3,1)$

$\mathbb{R}^{3,1}$ における回転演算子，並進演算子，伸長演算子および特殊共形演算子はリー代数をなすが，これは共形変換リー代数 $\mathfrak{c}(3,1)$ と呼ばれる．すなわち，回転演算子 M，並進演算子 P，伸長演算子 D および特殊共形演算子 K の微分表現をそれぞれ

$$M_{\mu\nu} = x_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} - x_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{21}$$

$$P = \epsilon^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{22}$$

$$D = x^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{23}$$

$$K_\mu = \left(x^2 \delta^\nu_\mu - 2x^\nu x_\mu\right) \frac{\partial}{\partial x^\nu} \tag{24}$$

[*2] 但し，添字 T は行列の転置を表す．転置が出てくる理由は双対表現（反傾表現とも）というものを考えるとわかる．別のノートに記す予定．

とすると，

$$
\begin{aligned}
[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] &= -\eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - \eta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} && (25)\\
[D, M_{\mu\nu}] &= 0 && (26)\\
[D, P_\mu] &= -P_\mu && (27)\\
[M_{\mu\nu}, P_\rho] &= -\eta_{\mu\rho}P_\nu + \eta_{\nu\rho}P_\mu && (28)\\
[D, K_\mu] &= K_\mu && (29)\\
[K_\mu, K_\nu] &= 0 && (30)\\
[K_\mu, P_\nu] &= 2M_{\mu\nu} + 2\eta_{\mu\nu}D && (31)\\
[M_{\mu\nu}, K_\rho] &= -\eta_{\mu\rho}K_\nu + \eta_{\nu\rho}K_\mu && (32)
\end{aligned}
$$

となっている．

2　局所的な対応関係

本節では $\mathbb{R}^{3,1}$ における共形変換リー代数に対応する $\mathbb{R}^{4,2}$ で定義されるリー代数が存在することを示す．

共形変換代数 $\mathfrak{c}(3,1)$ はリー代数としては $\mathfrak{so}(4,2)$ と同型であるが，それを見通しよくするために，$1 \leq \mu, \nu \leq 4$ として，

$$
\begin{aligned}
M_{05} &:= -D && (33)\\
M_{\mu 5} &:= \frac{1}{2}(aK_\mu + a^{-1}P_\mu) && (34)\\
M_{\mu 0} &:= \frac{1}{2}(aK_\mu - a^{-1}P_\mu) && (35)
\end{aligned}
$$

を導入する．但し $a \neq 0$ を定数とする．これを用いると，

$$
M_{ij} \quad (0 \leq i, j \leq 5, i \neq j)
$$

は共形変換代数の基底をなすことがわかる．この代数の次元は 15 であることがわかる．そして，元の計量テンソルを拡張した新たな 6 次元の計量テンソル η を導入する．

$$
\begin{aligned}
\eta &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} && (36)\\
&= \mathrm{diag}(1,1,1,1,-1,-1) && (37)
\end{aligned}
$$

正の符号をもつ第 0 成分と負の符号をもつ第 5 成分が新たに加わったことになる．この計量テンソルを用いると，交換関係は

$$
[M_{ij}, M_{kl}] = -\eta_{ik}M_{jl} + \eta_{jk}M_{il} + \eta_{il}M_{jk} - \eta_{jl}M_{ik} \tag{38}
$$

のように統一的に書かれることがわかる．すなわち共形変換代数 $\mathfrak{c}(3,1)$ がリー代数としては $\mathfrak{so}(4,2)$ と同型であることが明確となった．つまり群としては局所同型の関係にある．

3　空間の対応関係

3.1　Minkwoski 空間 $\mathbb{R}^{3,1}$ と光錐の射影空間 $PN^{3,1}$ の一部分の同一視

本節では Minkowski 空間 $\mathbb{R}^{3,1}$ と Minkowski 空間 $\mathbb{R}^{4,2}$ 中の光錐 $N^{4,2}$ の対応関係について説明する．

ここで $N_0^{4,2}$ を $N^{4,2}$ の中で

$$\begin{pmatrix} -t \\ x \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^{3,1}$$

の形のものを除いた集合であるとする．このとき，$N_0^{4,2}$ の要素は

$$\begin{pmatrix} \lambda\frac{1-|x|^2}{2} \\ \lambda x \\ \lambda\frac{1+|x|^2}{2} \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}^{3,1}, \lambda \neq 0$$

と書けることがわかる．一方，$N^{4,2}$ に属するが $N_0^{4,2}$ には属さない点

$$\begin{pmatrix} -t \\ x \\ t \end{pmatrix} \in N^{4,2} \backslash N_0^{4,2}$$

に対して，$|x|^2 = 0$ すなわち $x \in N^{3,1}$ である必要があることもわかる．

ここで

$$\pi : N_0^{4,2} \to \mathbb{R}^{3,1} : \begin{pmatrix} \lambda\frac{1-|x|^2}{2} \\ \lambda x \\ \lambda\frac{1+|x|^2}{2} \end{pmatrix} \mapsto x \tag{39}$$

という全射 π を考える．

x を固定したときに

$$\left\{ \begin{pmatrix} \lambda\frac{1-|x|^2}{2} \\ \lambda x \\ \lambda\frac{1+|x|^2}{2} \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

を一点とみなすことで $N_0^{4,2}$ の射影空間 $PN_0^{4,2}$ を考えることができる．すると，全単射

$$\pi_0 : PN_0^{4,2} \to \mathbb{R}^{3,1} : \left\{ \begin{pmatrix} \lambda\frac{1-|x|^2}{2} \\ \lambda x \\ \lambda\frac{1+|x|^2}{2} \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\} \mapsto x \tag{40}$$

が誘導される．

π_0 の定義域を

$$\left\{ \begin{pmatrix} -\lambda \\ \lambda x \\ \lambda \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}, |x| = 0 \tag{41}$$

の形の点，あるいは

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda x \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}, x \neq 0, |x| = 0 \tag{42}$$

の形の点を含むように，すなわち $PN^{4,2}$ [*3]全体に拡張したい．拡張した写像を $\tilde{\pi}_0$ と書くことにする．拡張するにあたって，Minkowski 空間 $\mathbb{R}^{3,1}$ における共形変換の中の特殊共形変換，およびそれを考えるにあたって重要な反転変換によって生じる特異的な挙動とそれによって為せねばならない空間の拡張に着目する．

3.2 $\mathbb{R}^{3,1}$ における反転変換と inverted cone$\tilde{N}^{3,1}$ への拡張

反転変換はノルムが 0 ではない領域，$\mathbb{R}^{3,1} \backslash N^{3,1}$ においては全単射写像として定義されている．すなわち，

$$I : \mathbb{R}^{3,1} \backslash N^{3,1} \to \mathbb{R}^{3,1} \backslash N^{3,1} : x \mapsto \frac{x}{|x|^2} \tag{43}$$

である．しかも，$I^2 = 1$ という性質を持つ．

反転変換を $N^{3,1}$ 上の点に作用させようとすると，ノルムが発散し特異的な振る舞いをしてしまう．そこで，I によって各 $x \in N^{3,1}$ が移される先を $I(x) (\notin R^{3,1})$ として用意し，この集合を “inverted cone”$\tilde{N}^{3,1}$ [*4]と定義する．各 $x \in N^{3,1}$ に対して $I(x)$ は異なるものであるとする．

3.3 特殊共形変換と射影空間 $PN^{3,1}$ への拡張

特殊共形変換演算子は $K(t) = IP(t)I$ (ただし $t \in \mathbb{R}^{3,1}$) で定義される演算子である．ここで $P(t)$ は $x \in \mathbb{R}^{3,1}$ に対して

$$P(t)(x) = t + x$$

という作用をする並進演算子である．

特殊共形変換演算子の $x \in \mathbb{R}^{3,1}$ への作用 $K(t)(x)$ は，本来 $x \in \mathbb{R}^{3,1}, |x|^2 \neq 0$ かつ

---

*3 $N^{4,2}$ の射影空間を $PN^{4,2}$ と書いている．$NP_0^{4,2} \subset N^{4,2}$ の関係にある．

*4 著者 adhara_mathphys の造語

$1+2t^\mu x_\mu+|t|^2|x|^2\neq 0$ のときに定義される．すなわち，

$$\begin{aligned} K(t)(x) &= IP(t)I(x) \\ &= I\left(\frac{x+|x|^2t}{|x|^2}\right) \\ &= |x|^2\frac{x+|x|^2t}{|x+|x|^2t|^2} \\ &= \frac{x+|x|^2t}{1+2t^\mu x_\mu+|t|^2|x|^2} \\ &\in R^{3,1}\backslash N^{3,1} \end{aligned} \tag{44}$$

となっている．

また，$|x|^2\neq 0$ かつ $1+2t^\mu x_\mu+|t|^2|x|^2=0$ のときの $K(t)(x)$ は反転演算子 I の定義域を $N^{3,1}$ に拡大しておけば定義可能である．すなわち

$$K(t)(x)=I\left(\frac{x+|x|^2t}{|x|^2}\right) \tag{45}$$

と形式的に書けるが，

$$|x+|x|^2t|^2=|x|^2(1+2t^\mu x_\mu+|t|^2|x|^2)=0$$

より

$$\frac{x+|x|^2t}{|x|^2}\in N^{3,1}$$

であるから定義域を拡大した反転演算子を作用させることができる．すなわちこのような定義のもとで

$$K(t)(x)\in\tilde{N}^{3,1}$$

になっていると解釈することが可能である．

次に $x\in\mathbb{R}^{3,1},|x|^2=0$ の場合の $K(t)(x)$ を考える．問題となるのは

$$P(t)I(x)=t+I(x)$$

の解釈である．$I(x)\in\tilde{N}^{3,1}$ と $t\in\mathbb{R}^{3,1}$ を足し算しているのだが，これが何を表すかは定義していなかった．しかしながら，一旦これが何を表すのかを問わずに上式 44 を形式的に用いると，

$$\begin{aligned} K(t)(x) &= IP(t)I(x) \\ &= \frac{x+|x|^2t}{1+2t^\mu x_\mu+|t|^2|x|^2} \\ &= \frac{x}{1+2t^\mu x_\mu} \end{aligned} \tag{46}$$

となる．さらに $1+2t^\mu x_\mu+|t|^2|x|^2=1+2t^\mu x_\mu\neq 0$ であれば

$$\frac{x}{1+2t^\mu x_\mu}\in N^{3,1}$$

となり，形式的式に過ぎなかった式 46 の右辺は特異的ではない一点を表すことになる．式 46 を $|x|^2=0$ かつ $1+2t^\mu x_\mu+|t|^2|x|^2=1+2t^\mu x_\mu\neq 0$ のときの $K(t)(x)$ の定義として採用してしまうことにする．すると，一旦は問わずにいた $P(t)I(x)=t+I(x)$ の正体も同時に定まる．すなわち，

$$IP(t)I(x)=I\left(t+I(x)\right)=\frac{x}{1+2t^\mu x_\mu}\in N^{3,1}$$

となることから

$$P(t)I(x)=IIP(t)I(x)=I\left(\frac{x}{1+2t^\mu x_\mu}\right)\in\tilde{N}^{3,1}$$

となり $P(t)I(x)=t+I(x)$ は Inverted cone 上の点となる．

特異性という観点で問題となるのは $x\in\mathbb{R}^{3,1},|x|^2=0$ かつ $1+2t^\mu x_\mu+|t|^2|x|^2=1+2t^\mu x_\mu=0$ のときの $K(t)(x)$ の定義である．このとき $x\neq 0$ であることに留意する．式 46 で展開された形式的式

$$K(t)(x)=IP(t)I(x)=\frac{x}{1+2t^\mu x_\mu}$$

も

$$P(t)I(x)=t+I(x)$$

も $\mathbb{R}^{3,1}$ や $\tilde{N}^{3,1}$ に属する点とは解釈し難く，正体不明である．[*5] これらの点は $\mathbb{R}^{3,1}$ や $\tilde{N}^{3,1}$ に属さないと考えるべきである．ここでは

$$\frac{x}{1+2t^\mu x_\mu}\simeq t+I(x)\simeq\{\lambda x|\lambda\in\mathbb{R}\}\in PN^{3,1}$$

という同一視[*6]を使用する．

前小節と本節により，$\mathbb{R}^{3,1}$ における共系変換は，$\mathbb{R}^{3,1}\cup\tilde{N}^{3,1}\cup PN^{3,1}$ を舞台として考えた方が，特異的な振る舞いが解消される点で都合の良いことがわかった．

3.4 Minkwoski 空間 $\mathbb{R}^{3,1}$ の拡張と光錐の射影空間 $PN^{3,1}$ の同一視

いよいよ，式 40 で導入された，$PN_0^{4,2}$ 上で定義されている π_0 を，$PN^{4,2}$ 上で定義される π に拡張することができる．

まず，$|x|^2=0$ の時，

$$\tilde{\pi}_0:\left\{\left.\begin{pmatrix}-\frac{\lambda}{2}\\ \lambda x\\ \frac{\lambda}{2}\end{pmatrix}\right|\lambda\in\mathbb{R}\right\}\mapsto I(x)\in\tilde{N}^{3,1}\tag{47}$$

*5 $\frac{x}{1+2t^\mu x_\mu}$ や $t+I(x)$ のノルムが有限実数にはならないことから $\mathbb{R}^{3,1}$ 上の点とは見做しがたい．$t+I(x)\in\tilde{N}^{3,1}$ とするとその反転について $\frac{x}{1+2t^\mu x_\mu}\in N^{3,1}$ としなくてはならないが無理がある．逆に $\frac{x}{1+2t^\mu x_\mu}\in\tilde{N}^{3,1}$ とすると $t+I(x)\in N^{3,1}$ としなくてはならないが，これも無理がある．

*6 $\simeq$ は形式的な等号を表す．

と定義する．さらに，$x \neq 0, |x|^2 = 0$ のとき，

$$\tilde{\pi}_0 : \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda x \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\} \mapsto \{\lambda x | \lambda \in \mathbb{R}\} \in PN^{3,1} \tag{48}$$

であると定義する．拡張前の定義域については

$$\tilde{\pi}_0 : \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \frac{1-|x|^2}{2} \\ \lambda x \\ \lambda \frac{1+|x|^2}{2} \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\} \mapsto x \in \mathbb{R}^{3,1} \tag{49}$$

であるから，

$$\tilde{\pi}_0 : PN^{4,2} \to \mathbb{R}^{3,1} \cup \tilde{N}^{3,1} \cup PN^{3,1}$$

は全単射となる．

3.5 今回の $PN^{3,1}$ の導入についてコメント

Cordani[2] は水素原子あるいは Kepler 問題の文脈で共形変換と光錐の幾何学の関係について述べている．Cordani[2] の p.114 には，“... Thus, a transformation of $\mathcal{K}$[*7] always blow up at some point of M_0[*8]. It is possible to regularize this action by adding a null cone to M_0 (since this is the topology of the submanifold, where the action $\mathcal{K}$ blows up) at infinity. ” とあるので，$x \in \tilde{N}^{3,1}$ を加えるだけで十分であると解釈できる．しかしながら，今回述べたように $|x|^2 = 0$ かつ $1 + 2t^\mu x_\mu$ のときに生じる $K(t)(x)$ の特異的な振る舞いに対応できない．

4 大域的な対応関係

前節で示したように，Minkowski 空間の拡張 $\mathbb{R}^{3,1} \cup \tilde{N}^{3,1} \cup PN^{3,1}$ と光錐の射影空間 $PN^{4,2}$ は $\tilde{\pi}_0$ を用いて一対一対応させることが可能である．本節では $\mathbb{R}^{3,1} \cup \tilde{N}^{3,1} \cup PN^{3,1}$ における共形変換が光錐の射影空間 $PN^{4,2}$ 上における回転操作に対応することを示す．回転操作がなす群 $SO(4,2)$ は $PN^{4,2}$ に作用できることを指摘しておく．以下に対応のさせ方を述べる．

前々節で示したリー代数同型にしたがって，

$$M_{05} := -D \tag{50}$$

$$M_{\mu 5} := \frac{1}{2}(K_\mu + P_\mu) \tag{51}$$

$$M_{\mu 0} := \frac{1}{2}(K_\mu - P_\mu) \tag{52}$$

とする．

---

*7 adhara 注：特殊共形変換のこと

*8 adhara 注：Minkowski 空間 $\mathbb{R}^{3,1}$ のこと

ここで $M_{ij} \leftrightarrow L_{ij}$ の置き換えをする．但し，

$$L_{ij} = \eta_{ik}({E^k}_j)^T - \eta_{jk}({E^k}_i)^T \tag{53}$$

である．これにより，共形リー代数と回転生成子の対応づけを図ることが可能である．

以下で，実際に対応していることを見る．まず，

$$L_{05} = ({E^0}_5)^T + ({E^5}_0)^T \tag{54}$$
$$L_{15} = ({E^1}_5)^T + ({E^5}_1)^T \tag{55}$$
$$L_{10} = ({E^1}_0)^T - ({E^0}_1)^T \tag{56}$$
$$L_{12} = ({E^1}_2)^T - ({E^2}_1)^T \tag{57}$$

等となっていることを記しておく．

■伸長作用

まず，

$$D = -M_{05} \leftrightarrow -L_{05} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{58}$$

の対応関係がわかる．それぞれの指数写像の対応関係として，

$$D(t) := \exp(tD) \leftrightarrow \exp(t(-L_{05})) = \begin{pmatrix} \cosh(-t) & 0 & 0 & 0 & 0 & \sinh(-t) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh(-t) & 0 & 0 & 0 & 0 & \cosh(-t) \end{pmatrix} \tag{59}$$

が成立する．実際に，

$$\exp(t(-L_{05})) \begin{pmatrix} \frac{1-|x|^2}{2} \\ x \\ \frac{1+|x|^2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^{-t}-|x|^2e^t}{2} \\ x \\ \frac{e^{-t}+|x|^2e^t}{2} \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} \frac{1-|e^tx|^2}{2} \\ e^tx \\ \frac{1+|e^tx|^2}{2} \end{pmatrix} \tag{60}$$

$$\exp(t(-L_{05})) \left\{ \begin{pmatrix} \lambda\frac{1-|x|^2}{2} \\ \lambda x \\ \lambda\frac{1+|x|^2}{2} \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda\frac{1-|e^tx|^2}{2} \\ \lambda e^tx \\ \lambda\frac{1+|e^tx|^2}{2} \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\} \tag{61}$$

となっており，伸長作用 $D(t)(x) = e^tx$ に対応していることがわかる．

■並進作用

まず，

$$P_1 = M_{15} - M_{10} \leftrightarrow L_{15} - L_{10} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{62}$$

の対応関係がわかる．それぞれの指数写像の対応関係として，

$$P(te_1) := \exp(tP_1) \leftrightarrow \exp(t(L_{15} - L_{10})) = \begin{pmatrix} 1-\frac{t^2}{2} & -t & 0 & 0 & 0 & -\frac{t^2}{2} \\ t & 1 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{t^2}{2} & t & 0 & 0 & 0 & 1+\frac{t^2}{2} \end{pmatrix} \tag{63}$$

が成立する．実際に，

$$\exp(t(L_{15} - L_{10})) \begin{pmatrix} \frac{1-|x|^2}{2} \\ x \\ \frac{1+|x|^2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-|x+te_1|^2}{2} \\ x+te_1 \\ \frac{1+|x+te_1|^2}{2} \end{pmatrix} \tag{64}$$

$$\exp(t(L_{15} - L_{10})) \left\{ \begin{pmatrix} \lambda\frac{1-|x|^2}{2} \\ \lambda x \\ \lambda\frac{1+|x|^2}{2} \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda\frac{1-|x+te_1|^2}{2} \\ \lambda(x+te_1) \\ \lambda\frac{1+|x+te_1|^2}{2} \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\} \tag{65}$$

より，並進作用 $P(te_1)x = x + te_1$ に対応していることわかる．

■特殊共形変換

まず，

$$K_1 = M_{15} + M_{10} \leftrightarrow L_{15} + L_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{66}$$

の対応関係がわかる．それぞれの指数写像の対応関係として

$$K(te_1) := \exp(tK_1) \leftrightarrow \exp(t(L_{15} + L_{10})) = \begin{pmatrix} 1-\frac{t^2}{2} & t & 0 & 0 & 0 & \frac{t^2}{2} \\ -t & 1 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{t^2}{2} & t & 0 & 0 & 0 & 1+\frac{t^2}{2} \end{pmatrix} \tag{67}$$

が成立する．実際に，

$$\exp(t(L_{15}+L_{10}))\begin{pmatrix}\frac{1-|x|^2}{2}\\ x\\ \frac{1+|x|^2}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1-|x|^2+2tx^1+t^2|x|^2}{2}\\ x+t|x|^2e_1\\ \frac{1+|x|^2+2tx^1+t^2|x|^2}{2}\end{pmatrix}=(1+2tx^1+t^2|x|^2)\begin{pmatrix}\frac{1-\left|\frac{x+t|x|^2e_1}{1+2tx^1+t^2|x|^2}\right|^2}{2}\\ \frac{x+t|x|^2e_1}{1+2tx^1+t^2|x|^2}\\ \frac{1+\left|\frac{x+t|x|^2e_1}{1+2tx^1+t^2|x|^2}\right|^2}{2}\end{pmatrix} \tag{68}$$

となる．

　$1+2tx^1+t^2|x|^2\neq 0$ であれば，

$$\exp(t(L_{15}+L_{10}))\left\{\begin{pmatrix}\lambda\frac{1-|x|^2}{2}\\ \lambda x\\ \lambda\frac{1+|x|^2}{2}\end{pmatrix}\middle|\lambda\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}\lambda\frac{1-\left|\frac{x+t|x|^2e_1}{1+2tx^1+t^2|x|^2}\right|^2}{2}\\ \lambda\frac{x+t|x|^2e_1}{1+2tx^1+t^2|x|^2}\\ \lambda\frac{1+\left|\frac{x+t|x|^2e_1}{1+2tx^1+t^2|x|^2}\right|^2}{2}\end{pmatrix}\middle|\lambda\in\mathbb{R}\right\} \tag{69}$$

より，特殊共形変換 $K(te_1)x=\frac{x+t|x|^2e_1}{1+2tx^1+t^2|x|^2}$ に対応することがわかる．

　$1+2tx^1+t^2|x|^2=0$ であれば，

$$\exp(t(L_{15}+L_{10}))\begin{pmatrix}\frac{1-|x|^2}{2}\\ x\\ \frac{1+|x|^2}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-|x|^2}{2}\\ x+t|x|^2e_1\\ \frac{|x|^2}{2}\end{pmatrix} \tag{70}$$

で，さらに $|x|^2\neq 0$ であれば，

$$\exp(t(L_{15}+L_{10}))\left\{\begin{pmatrix}\lambda\frac{1-|x|^2}{2}\\ \lambda x\\ \lambda\frac{1+|x|^2}{2}\end{pmatrix}\middle|\lambda\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}-\frac{\lambda}{2}\\ \lambda\frac{x+t|x|^2e_1}{|x|^2}\\ \frac{\lambda}{2}\end{pmatrix}\middle|\lambda\in\mathbb{R}\right\} \tag{71}$$

より，特殊共形変換 $K(te_1)x=I\left(\frac{x+t|x|^2e_1}{|x|^2}\right)$ に対応することがわかる．$|x|^2=0$ であれば，

$$\exp(t(L_{15}+L_{10}))\left\{\begin{pmatrix}\lambda\frac{1-|x|^2}{2}\\ \lambda x\\ \lambda\frac{1+|x|^2}{2}\end{pmatrix}\middle|\lambda\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}0\\ \lambda x\\ 0\end{pmatrix}\middle|\lambda\in\mathbb{R}\right\} \tag{72}$$

より，特殊共形変換 $K(te_1)x=\{\lambda x|\lambda\in\mathbb{R}\}$ に対応することがわかる．

　以上より，Minkowski 空間 $\mathbb{R}^{3,1}$ の拡張 $\mathbb{R}^{3,1}\cup\tilde{N}^{3,1}\cup PN^{3,1}$ にわたる特殊共形変換に対応することがわかる．

■回転作用

まず，

$$M_{12} \leftrightarrow L_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{73}$$

の対応関係がわかる．それぞれの指数写像の対応関係として

$$R_{12}(t) := \exp(tR_{12}) \leftrightarrow \exp(tL_{12}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin t & \cos t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{74}$$

が成立する．第 0 成分と第 5 成分に対しては恒等的に働くので，Minkowski 空間の拡張 $\mathbb{R}^{3,1} \cup \tilde{N}^{3,1} \cup PN^{3,1}$ と光錐の射影空間 $PN^{4,2}$ の双方で回転作用として働くのは明らかである．

参考文献

[1] Ronald Mirman. (2005). "Quantum Field Theory Conformal Group Theory Conformal Field Theory." iUniverse.

[2] Bruno Cordani. (2012). "The Kepler problem: group theoretical aspects, regularization and quantization, with application to the study of perturbations (Vol. 29)." Birkhäuser.