単位超球面上の帯球関数と Gegenbauer 多項式

adhara*

2018 年 2 月 12 日

1　一般の D 次元空間のラプラシアンの極座標表示と Laplace-Beltrami 演算子

$\boldsymbol{R}^D$ 次元空間における単位超球面は S^{D-1} という多様体である。

S^{D-1} のことを考えるには、極座標表示 $(r, \theta_0, \theta_1, \cdots, \theta_{D-2})$ を導入するのが便利である。ここで

$$r \geq 0, 0 \leq \theta_0 < 2\pi, 0 \leq \theta_i < \pi \ (1 \leq i \leq \ D-2)$$

* Twitter @adhara_mathphys

であり、

$$
\begin{aligned}
x_1 &= r\sin\theta_0 \prod_{i=1}^{D-2} (\sin\theta_i) && (1)\\
x_2 &= r\cos\theta_0 \prod_{i=1}^{D-2} (\sin\theta_i) && (2)\\
x_3 &= r\cos\theta_1 \prod_{i=2}^{D-2} (\sin\theta_i) && (3)\\
&\cdots \\
x_k &= r\cos\theta_{k-2} \prod_{i=k-1}^{D-2} (\sin\theta_i) && (4)\\
&\cdots \\
x_{D-1} &= r\cos(\theta_{D-3})\sin(\theta_{D-2}) && (5)\\
x_D &= r\cos(\theta_{D-2}) && (6)
\end{aligned}
$$

のように座標変換を行う。

極座標が直交曲線座標であることを利用するとラプラシアンは、

$$
\begin{aligned}
\Delta_{\boldsymbol{R}^D} &= \sum_{i=1}^{D} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \\
&= \frac{1}{r^{D-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{D-1} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\Delta_{S^{D-1}}}{r^2} && (7)
\end{aligned}
$$

のように表示することが出来る。$\Delta_{S^{D-1}}$ は S^{-1} 上のラプラシアンであり、Laplace-Beltrami 演算子と称される。

Laplace-Beltrami 演算子は一つ下の次元の Laplace-Beltrami 演算子を用いて逐次的に求めることが出来る。

$$\Delta_{S^D} = \frac{1}{(\sin\theta_{D-1})^{D-1}}\left(\frac{\partial}{\partial\theta_{D-1}}\left((\sin\theta_{D-1})^{D-1}\frac{\partial}{\partial\theta_{D-1}}\right)\right) + \frac{1}{(\sin\theta_{D-1})^2}\Delta_{S^{D-1}} \tag{8}$$

2 $SO(D)$ 群の作用

球面調和関数を表現するために帯球関数というものが用いられる。これについて説明する前に $SO(D)$ 群の作用について多少の知識が必要である。

$SO(D)$ 群は R^D 上のベクトルの（狭義）回転操作が成す群である。すなわちベクトルの長さを保存する回転操作の群である。部分多様体 S^{D-1} 上の点を考えると、これは R^D 上の長さ 1 のベクトルと一対一対応させることができる。長さ 1 のベクトルは回転によって長さ 1 のベクトルに移るので、$SO(D)$ の S^{D-1} への作用を考えることが出来る。とくに $SO(D)$ は S^{D-1} に対して推移的に作用することが分かる。すなわち、

$$\forall u, v \in S^{D-1}, \exists g \in SO(D) : u = gv \tag{9}$$

が成立する。群の言葉では軌道（orbit）がただ一つであることと同値であり、すべての S^{D-1} 上の要素をある一つの要素

に対して群の要素を作用させることで生成できることを意味している。

2.1　固定部分群（stabilizer subgroup）

$SO(D)$ 群にはいくつかの部分群があるが、S^{D-1} 上の一つの点を固定するような部分群を固定部分群と呼ぶ。たとえば点 $x \in S^{D-1}$ を固定したときに

$$\mathrm{Stab}(x) := \{g \in SO(D) | gx = x\} \tag{10}$$

で定義される $\mathrm{Stab}(x)$ は x を固定する部分群である。$\mathrm{Stab}(x)$ は $SO(D-1)$ と群同型である。

$$\mathrm{Stab}(x) \simeq SO(D-1) \tag{11}$$

2.2　推移作用としての性質

群 G が集合 X に推移作用しているとする。このとき任意の $x \in X$ に対して

$$X = \{gx | g \in G\} \tag{12}$$

となる。

G の部分群 H により定まる左コセット

$$G/H = \{gH | g \in\} \tag{13}$$

に対しても自然に推移作用することが分かる。自然な作用は

$$g(g'H) = (gg')H \tag{14}$$

で与えられる。推移的であることは eH からすべての G/H の要素が得られることから明らか。

G が作用する集合を G 集合と呼ぶ。二つの G 集合 X, Y 間の写像 $\psi : X \to Y$ に対して

$$\forall x \in X, \forall g \in G : \psi(gx) = g\psi(x) \tag{15}$$

が成立するとき ψ は G 集合準同型と呼ばれる。

定理 1. ある $x \in G$ を定めたとき G 集合 $G/\mathrm{Stab}(x)$ から X への G 集合準同型

$$\phi : g\mathrm{Stab}(x) \mapsto gx \tag{16}$$

は G 集合同型となる。

証明. まず、任意の $g' \in \mathrm{Stab}(x)$ に対して $gg'x = gx$ となることからこの準同型は well-defined である。さらに $gx = g'x \Rightarrow g'^{-1}gx = x \Rightarrow g'^{-1}g \in \mathrm{Stab} \Rightarrow g'\mathrm{Stab}(x) = g\mathrm{Stab}(x)$ より単射である。$X = \{gx | g \in G\}$ より全射である。 □

したがって、$SO(D-1)$ を $SO(D)$ の固定部分群と見なしたときに G 集合としての同型

$$SO(D)/SO(D-1) \simeq S^{D-1} \tag{17}$$

が成立する。

2.3 Laplace-beltrami 演算子と SO(D) 群の作用の可換性

S^{D-1} 上の関数 $f(x)$ への $g \in SO(D)$ の作用は

$$T(g)f(x) = f(g^{-1}x) \tag{18}$$

のように定義される。

ここでは示さないが Laplace-Beltrami 演算子 $\Delta_{S^{D-1}}$ は $SO(D)$ 群を生成する $so(D)$ 代数のカシミール元の一つとなっている。すなわち、$SO(D)$ の元の作用と可換となり、

$$\Delta_{S^{D-1}}(T(g)f) = T(g)\Delta_{S^{D-1}}f \tag{19}$$

が成立する。

3 球面調和関数と帯球関数

3.1 球面調和関数のまとめ

証明はほかに譲るがフーリエ級数の理論の拡張として、測度

$$d\Omega(x) = \prod_{0}^{D-2} (\sin^i \theta_i d\theta_i) \tag{20}$$

を用いた L^2 ノルムによって定まる内積空間 $L^2(S^{D-1}, d\Omega)$ は、直交関数系である球面調和関数の直和として表すことが出来る。すなわち次の定理が成立する。

定理 2. $\mathcal{H}_k$ を k 次の球面調和関数（k 次の斉次多項式となる調和関数を球面に制限したもの）からなる関数部分空間とすれば、

$$L^2(S^{D-1}, d\Omega) = \oplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k \tag{21}$$

が成立する。

その他成立することとしては、

定理 3. $\mathcal{H}_k$ が *Laplace-Beltrami* 演算子の固有空間となっていること、すなわち、$Y \in \mathcal{H}_k$ に対して

$$\Delta_{S^{D-1}} Y = -k(D+k-2)Y \tag{22}$$

が成立する。

や、

定理 4. 線形空間としての次元が

$$\mathrm{dim}\mathcal{H}_k = {}_{D+k-1}C_{D-1} - {}_{D+k-3}C_{D-1} \tag{23}$$

で与えられる。

などがある。

3.2　帯球関数

ある $u_0 \in S^{D-1}$ を定めると固定部分群 $\mathrm{Stab}(u_0)$ が定まる。これを L としよう。

また、一般に L 群の作用によって不変な関数を L 不変な関数と呼ばれる。すなわち $\boldsymbol{R}^D$ 上 k 次の複素係数斉次多項式からなる関数空間を P_k としたときにその部分空間

$$P_k^L = \left\{ p(x) \in P_k | \forall x \in \boldsymbol{R}^D, \forall l \in L : p(lx) = p(x) \right\} \tag{24}$$

は $\boldsymbol{R}^D$ 上 k 次の複素係数斉次多項式のうち L 不変なものからなる関数空間である。

帯球関数とは球面調和関数のうち固定部分群によって固定されるものである。すなわち、

$$\mathcal{H}_k^L := \left\{ Y \in \mathcal{H}_k | \forall l \in L, \forall u \in S^{D-1} : Y(lu) = Y(u) \right\} \tag{25}$$

で定義される関数空間に属する関数を k 次の帯球関数と呼ぶ。このとき $\mathcal{H}_k^L$ は P_k^L のうちラプラス方程式を満たす多項式を S^{D-1} に制限した関数を要素とする関数空間となる。

ここで次のような定理が成立する。

定理 5. $p(x) \in P_k^L$ ならば、

$$p(x) = \sum_{m=0}^{[k/2]} a_m |x|^{2m} (x \cdot u_0)^{j-2m} \quad (a_m \in \boldsymbol{C}) \tag{26}$$

と書ける。ここで $\cdot$ は内積を表す。

定理 6. k 次の調和関数（ラプラス方程式を満たす k 次複素係数斉次多項式）からなる $\mathcal{H}P_k$ とすると、$\boldsymbol{C}$ 線形空間の直和分解

$$P_k = \mathcal{H}P_k \oplus |x|^2 P_{k-2} \tag{27}$$

が成立する。

定理 7. $\mathcal{H}P_k$ と $\mathcal{H}_k$ は $\boldsymbol{C}$ 線形同型である。

定理 8. 任意の $k = 0, 1, \cdots$ に対して、$\dim \mathcal{H}_k^L = 1$ となる。とくに $Y \in \mathcal{H}_k^L$ ならば、

$$Y(u) = \sum_{i=0}^{k} c_{ki} (u \cdot u_0)^i \quad (b_{ki} \in \boldsymbol{C}) \tag{28}$$

と書ける。すなわち帯球関数は多項式として表される。

4 Gegenbauer 多項式

D 次元空間中の球面 S^{D-1} 上の関数である k 次の帯球関数 Y はある k 次多項式 $\varphi(t)$ を用いて

$$Y(u) = \varphi(u \cdot u_0) \quad (u \in S^{D-1}) \tag{29}$$

と書かれる。実は $\varphi(t)$ は Gegenbauer 多項式という特殊関数となるのだがそのことを本章で見て行く。

4.1 Gegenbauer 多項式の母関数による定義

Gegenbauer 多項式は母関数 $(1-2xt+t^2)^{-\alpha}$ の級数展開に依って定義される直交多項式である。すなわち、

$$\frac{1}{(1-2xt+t^2)^\alpha} = \sum_{i=0} C_i^\alpha(x)t^i \tag{30}$$

によって定義される多項式 C_i^α は指数 α で i 次の Gegenbauer 多項式である。とくに $\alpha = \frac{1}{2}$ のときは Legendre 多項式となる。α は空間の次元に関する量である。

4.2 $\varphi(t)$ の満たす微分方程式

$\varphi(t)$ が

$$(t^2-1)\varphi''(t) + (D-1)t\varphi'(t) - k(D+k-2)\varphi(t) = 0 \tag{31}$$

という二階微分方程式を満たすことを示す。

証明. 帯球関数 Y の $\boldsymbol{R}^D$ への拡張 $F(x)$ を考える。すなわち、

$$F(x) = Y\left(\frac{x}{|x|}\right) \tag{32}$$

とする。このとき、

$$F(x) = \varphi\left(\frac{x \cdot u_0}{|x|}\right) \tag{33}$$

となる。F は極座標表示で動径変数 $r = |x|$ には依らない、すなわち、

$$\frac{\partial F}{\partial r} = 0 \tag{34}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}(\Delta F)|_{S^{D-1}} = \Delta_{S^{D-1}} Y = -k(k+D-2)Y(u) \\ = -k(k+D-2)\varphi\left(u \cdot u_0\right)\end{aligned} \tag{35}$$

第一辺は $\boldsymbol{R}^D$ 上のラプラシアンを作用させたものに対して定義域を S^{D-1} に制限する操作を表し、第二辺は S^{D-1} 上の Laplace-Beltrami 演算子を作用させることを意味している。最後から二つ目の等号は式 22 より成立する。

ここで、ΔF を計算する。$(u_0)_j$ を u_0 の第 j 成分として、$r = |x|$ と書くと、

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{(u_0)_j}{r}\varphi'\left(\frac{x \cdot u_0}{r}\right) - \frac{x \cdot u_0}{r^3} x_j \varphi'\left(\frac{x \cdot u_0}{r}\right) \tag{36}$$

となり、

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 F}{\partial x_j^2}\\
&=\varphi'\left(\frac{x\cdot u_0}{r}\right)\left\{-\frac{2(u_0)_j x_j}{r^3}-\frac{x\cdot u_0}{r^3}+\frac{3}{r^5}(x\cdot u_0)x_j^2\right\}\\
&+\varphi''\left(\frac{x\cdot u_0}{r}\right)\left\{\frac{(u_0)_j^2}{r^2}-2\frac{x\cdot u_0}{r^4}x_j(u_0)_j+\frac{(x\cdot u_0)^2}{r^6}x_j^2\right\}
\end{aligned}
\tag{37}
$$

となる。したがって、

$$
\begin{aligned}
\Delta F=\varphi'\left(\frac{x\cdot u_0}{r}\right)\frac{x\cdot u_0}{r^3}(-D+1)\\
+\varphi''\left(\frac{x\cdot u_0}{r}\right)\left(\frac{1}{r^2}-\frac{(x\cdot u_0)^2}{r^4}\right)
\end{aligned}
\tag{38}
$$

となる。これを S^{D-1} に制限すると、（変数を x でなく $u\in S^{D-1}$ とかく。$r=1$ となる。）

$$
\begin{aligned}
-k(k+D-2)\varphi(u\cdot u_0)=\varphi'(u\cdot u_0)\,u\cdot u_0(-D+1)\\
+\varphi''(u\cdot u_0)\left(1-(u\cdot u_0)^2\right)
\end{aligned}
\tag{39}
$$

を得る。$u\cdot u_0=t$ とおけば目的の式を得る。 □

4.3 Gegenbauer 多項式の満たす微分方程式

指数 α、k 次の Gegenbauer 多項式は φ と同様の二階常微分方程式を満たす。

命題 9. 漸化式

$$C_{k-1}^{\alpha}{}' = xC_k^{\alpha}{}' - kC_k^{\alpha} \qquad (k > 1) \tag{40}$$

$$C_{k+1}^{\alpha}{}' = xC_k^{\alpha}{}' + (k+2\alpha)C_k^{\alpha} \qquad (k > 0) \tag{41}$$

が成立する。

証明. 母関数 $(1-2xt+t^2)^{-\alpha}$ のテイラー展開を x で偏微分すると、

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k^{\alpha}(x) 2\alpha t^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{\alpha}{}'(x) t^k (1-2xt+t^2) \tag{42}$$

、t で偏微分すると、

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k^{\alpha}(x) 2\alpha(x-t) t^k = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{\alpha}(x) k t^{k-1} (1-2xt+t^2) \tag{43}$$

を得る。一つ目の式より、

$$C_{k+1}^{\alpha}{}' + C_{k-1}^{\alpha}{}' = 2xC_k^{\alpha}{}' + 2\alpha C_k^{\alpha} \tag{44}$$

を二つ目の式より、

$$(k-1+2\alpha)C_{k-1}^{\alpha} + (k+1)C_{k+1}^{\alpha} = (2k+2\alpha)xC_k^{\alpha} \tag{45}$$

を得る。式 45 を微分すると

$$\begin{aligned}&(k-1+2\alpha){C_{k-1}^{\alpha}}'+(k+1){C_{k+1}^{\alpha}}'\\&=(2k+2\alpha)C_k^{\alpha}+(2k+2\alpha)x{C_k^{\alpha}}'\end{aligned} \tag{46}$$

を得る。

■(i)$\alpha \neq 1$ のとき

式 44 と 46 は独立となる。$-(k+\alpha)\times(44)+(46)$ より、

$$\begin{aligned}(2k+2\alpha)(1-\alpha)C_k^{\alpha}&=(-1+\alpha){C_{k-1}^{\alpha}}'+(1-\alpha){C_{k+1}^{\alpha}}'\\(2k+2\alpha)C_k^{\alpha}&=-{C_{k-1}^{\alpha}}'+{C_{k+1}^{\alpha}}'\end{aligned} \tag{47}$$

を得る。$(44)\pm(47)$ より目的の漸化式を得る。

■(ii)$\alpha = 1$ のとき

式 44 と 46 は独立でないので、上記の手法は使用できない。

$$A_k : {C_{k-1}^{1}}' = x{C_k^{1}}' - kC_k^1 \tag{48}$$

$$B_k : {C_k^{1}}' = x{C_{k-1}^{1}}' + (k+1)C_{k-1}^1 \tag{49}$$

とし、A_k, B_k が $k=1,2,\cdots$ で成立することを帰納法により示す。

$k=1$ で成立することは、$C_0^1=1, C_1^1=2x$ となることから分かる。

A_k, B_k が成立するときに A_{k+1}, B_{k+1} が成立することを示す。式 44 より、

$$\begin{aligned} {C^1_{k+1}}' &= 2x{C^1_k}' + 2C^1_k - {C^1_{k-1}}' \\ &= x{C^1_k}' + (2+k)C^1_k \quad (A_k\text{を代入した。}) \end{aligned} \tag{50}$$

となり、B_{k+1} の成立が確かめられた。

B_k より、

$$\begin{aligned} {C^1_k}' &= x{C^1_{k-1}}' + (k+1)C^1_{k-1} \\ &= x{C^1_{k-1}}' + (k+1)(2xC^1_k - C^1_{k+1}) \quad (\text{式 } 45 \text{ より}) \\ &= x\{{C^1_{k-1}}' + 2(k+1)C^1_k\} - (k+1)C^1_{k+1} \\ &= x\{{C^1_{k-1}}' + 2C^1_k + 2x{C^1_k}' - 2{C^1_{k-1}}'\} \\ &- (k+1)C^1_{k+1} \quad (A_k\text{の主張より}) \\ &= x{C^1_{k+1}}' - (k+1)C^1_{k+1} \quad (\text{式 } 44 \text{ より}) \end{aligned}$$

となるので、A_{k+1} の成立が確認できた。 □

定理 10. 微分方程式

$$(x^2-1){C^\alpha_k}''(x) + (2\alpha+1)x{C^\alpha_k}'(x) - k(2\alpha+k)C^\alpha_k(x) = 0 \tag{51}$$

が成立する。

証明. 前の命題より、

$$\begin{aligned} C_k^{\alpha\prime} &= xC_{k-1}^{\alpha}{}' - (k-1+2\alpha)C_{k-1}^{\alpha} \\ &= x^2C_k^{\alpha\prime} - kxC_k^{\alpha} + (2\alpha+k-1)C_{k-1}^{\alpha} \end{aligned} \tag{52}$$

が成立する。両辺微分すると、

$$\begin{aligned} C_k^{\alpha\prime\prime} &= 2xC_k^{\alpha\prime} + x^2C_k^{\alpha\prime\prime} \\ &- kC_k\alpha - kxC_k^{\alpha\prime} + (2\alpha+k-1)C_{k-1}^{\alpha}{}' \end{aligned} \tag{53}$$

$$\tag{54}$$

前の命題を再び用いると、

$$(x^2-1)C_k^{\alpha\prime\prime} + (2\alpha+1)xC_k^{\alpha\prime} - (2\alpha+k)kC_k^{\alpha} = 0 \tag{55}$$

が成立する。 □