単位超球面上の Laplace-Beltrami 演算子と球面調和関数

adhara*

2018 年 5 月 24 日

1　一般の D 次元の場合

1.1　一般の D 次元空間のラプラシアンの極座標表示と Laplace-Beltrami 演算子

$\boldsymbol{R}^D$ 次元空間における単位超球面は S^{D-1} という多様体である。

S^{D-1} のことを考えるには、極座標表示 $(r, \theta_0, \theta_1, \cdots, \theta_{D-2})$ を導入するのが便利である。ここで $r \geq 0, 0 \leq \theta_0 < 2\pi, 0 \leq$

* Twitter @adhara_mathphys

$\theta_i < \pi$ $(1 \leq i \leq\ D-2)$ であり、

$$
\begin{aligned}
x_1 &= r\cos\theta_0 \prod_{i=1}^{D-2} (\sin\theta_i) && (1)\\
x_2 &= r\sin\theta_0 \prod_{i=1}^{D-2} (\sin\theta_i) && (2)\\
x_3 &= r\cos\theta_1 \prod_{i=2}^{D-2} (\sin\theta_i) && (3)\\
&\cdots\\
x_k &= r\cos\theta_{k-2} \prod_{i=k-1}^{D-2} (\sin\theta_i) && (4)\\
&\cdots\\
x_{D-1} &= r\cos(\theta_{D-3})\sin(\theta_{D-2}) && (5)\\
x_D &= r\cos(\theta_{D-2}) && (6)
\end{aligned}
$$

のように座標変換を行う。

極座標が直交曲線座標であることを利用するとラプラシアンは、

$$
\Delta_{\boldsymbol{R}^D} = \frac{1}{r^{D-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{D-1}\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\Delta_{S^{D-1}}}{r^2} \tag{7}
$$

のように表示することが出来る。$\Delta_{S^{D-1}}$ は S^{-1} 上のラプラシアンであり、Laplace-Beltrami 演算子と称される。

Laplace-Beltrami 演算子は一つ下の次元の Laplace-

Beltrami 演算子を用いて逐次的に求めることが出来る。

$$\Delta_{S^d} = \frac{1}{(\sin\theta_{d-1})^{d-1}} \left(\frac{\partial}{\partial\theta_{d-1}} \left((\sin\theta_{d-1})^{d-1} \frac{\partial}{\partial\theta_{d-1}} \right) \right) + \frac{1}{(\sin\theta_{d-1})^2} \Delta_{S^{d-1}} \tag{8}$$

$\Delta_{S^{D-1}}$ は D 次元空間上における回転対称性を記述しており、$SO(D)$ 群を生成する $so(D)$ 代数のカシミール元の一つとなっている。

1.2 一般の D 次元における球面調和関数の性質

Laplace-Beltrami 演算子 $\Delta_{S^{D-1}}$ の固有関数 $Y \in L^2(S^{D-1})$ を D 次元における球面調和関数という。球面調和関数の性質を証明なしでいくつか紹介する。[*1]

- $\Delta_{S^{D-1}}$ の固有値は n を非負整数として $-n(n+D-2)$ で与えられ、

  $$\Delta_{S^{D-1}} Y_{n\alpha} = -n(n+D-2) Y_{n\alpha} \tag{9}$$

  のようになっている。ここで、球面調和関数 Y 中の n は固有値に対応する指標であり、α は同一固有値とな

[*1] 後日加筆したい。

る（縮退する）線形独立な固有関数を区別する指標である。

- $Y_{n\alpha}$ は元の直交座標を用いて D 変数の同次多項式として表されるが、n はその次数となっている。
- 指標 n に対応した固有空間（同一固有値 $-n(n+D-2)$ を持つ球面調和関数が張る関数空間）の次元は、

$$
{}_{n+D-1}C_n - {}_{n+D-3}C_{n-2} \tag{10}
$$

で与えられる。関数空間 $L^2(S^{D-1})$ を $SO(D)$ 群の表現空間と見なしたときに、n で区別される上記の固有空間は既約表現空間となっている。

2　三次元の場合

2.1　三次元空間のラプラシアンの極座標表示と Laplace-Beltrami 演算子

三次元空間の極座標表示 (r, θ, ϕ) を導入する。すなわち、

$$
(x, y, z) = (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta) \tag{11}
$$

とする。ただし、$r > 0,\ 0 \le \theta < \pi,\ 0 \le \phi < 2\pi$ である。

直交曲線座標におけるラプラシアンの表示公式を用いると、

$$
\Delta_{\boldsymbol{R}^3} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\Delta_{S^2}}{r^2} \tag{12}
$$

であり、Laplace-Beltrami 演算子 S^2 は

$$\Delta_{S^2} = \frac{1}{\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\right\} \tag{13}$$

となる。

以下、$D = 3$ の場合の式 9 と 10 をリー代数 $so(3)$ の既約表現を用いて説明する。

2.2 Laplace-Beltrami 演算子の Δ_{S^2} 代数基底による表示

三次元空間における角運動量演算子

$$L_x = y\frac{1}{i}\partial_z - z\frac{1}{i}\partial_y,\ L_y = z\frac{1}{i}\partial_x - x\frac{1}{i}\partial_z,\ L_z = x\frac{1}{i}\partial_y - y\frac{1}{i}\partial_x \tag{14}$$

を定義するとこれらの間には交換関係

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}L_k \tag{15}$$

$$\tag{16}$$

が成立する。（アインシュタインの縮約を用いた。）これらは $so(3)$ 代数の基底を成しており、$SO(3)$ 群を生成する働きを持つ。

これらを用いると Laplace-Beltrami 演算子は

$$\Delta_{S^2} = -\boldsymbol{L}^2 \tag{17}$$

のように書くことが出来る。

2.3 表現空間が $L^2(S^2)$ のときの $so(3)$ 代数の既約表現

$so(3)$ 代数の（有限次元）既約表現は $\boldsymbol{L}^2$ の固有値によって分類することが出来る。そしてその固有状態の縮退数は L_z の固有値を考えることによって分かる。すなわち、$\boldsymbol{L}^2$ と L_z の同時固有状態を考えることが出来て、

$$\boldsymbol{L}^2|l,m\rangle = l(l+1)|l,m\rangle \tag{18}$$

$$L_z|l,m\rangle = m|l,m\rangle \tag{19}$$

となる。ここで各固有状態は S^2 上の関数（球面調和関数）となる。$so(3)$ 代数の表現空間が $L^2(S^2)$ であるときは l の取りうる値は非負整数に制限され、[*2] m は $-l \leq m \leq l$ の整数となる。したがって、l に属する既約表現の次元は $2l+1$ となる。

よって、$n = l,\ \alpha = m$ とし、$Y_{n\alpha} = |l,m\rangle$ と書けば、

$$\Delta_{S^2} Y_{n\alpha} = -n(n+1)Y_{n\alpha} \tag{20}$$

となって式 9 を満たす。

固有値 $-n(n+1)$ となる固有空間の次元は $2n+1$ であるが、

$${}_{n+2}C_n - {}_nC_{n-2} = 2n+1 \tag{21}$$

*2 制限される事情については別の機会に触れたい。

となるので式 10 を満たす。ただし、$m < 0$ で ${}_nC_m = 0$ である。

3　四次元の場合

3.1　四次元空間のラプラシアンの極座標表示と Laplace-Beltrami 演算子

四次元空間の極座標表示 $(r, \alpha, \theta, \phi)$ を導入する。すなわち、

$$(x, y, z, w) = (r \sin\alpha \sin\theta \cos\phi, r \sin\alpha \sin\theta \sin\phi, r \sin\alpha \cos\theta, r\,\mathrm{co}$$

とする。ただし、$r > 0,\ 0 \leq \alpha < \pi,\ 0 \leq \theta < \pi,\ 0 \leq \phi < 2\pi$ である。

直交曲線座標におけるラプラシアンの表示公式を用いると、

$$\Delta_{\boldsymbol{R}^4} = \frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^3 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\Delta_{S^3}}{r^2} \tag{23}$$

となる。ここで、Laplace-Beltrami 演算子は

$$\Delta_{S^3} = \frac{1}{\sin^2\alpha\ \sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\sin^2\alpha \sin\theta \frac{\partial}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial\,\cdots}\right.$$

となる。

3.2 Laplace-Beltrami 演算子 Δ_{S^3} の $so(4)$ 代数基底による表示

四次元空間においては独立な角運動量演算子が 6 個存在する。例えば、

$$L_x = y\frac{1}{i}\partial_z - z\frac{1}{i}\partial_y,\ L_y = z\frac{1}{i}\partial_x - x\frac{1}{i}\partial_z,\ L_z = x\frac{1}{i}\partial_y - y\frac{1}{i}\partial_x \tag{25}$$

$$M_x = x\frac{1}{i}\partial_w - w\frac{1}{i}\partial_x,\ M_y = y\frac{1}{i}\partial_w - w\frac{1}{i}\partial_y,\ M_z = z\frac{1}{i}\partial_w - w\frac{1}{i}\partial_z \tag{26}$$

で定義される角運動量演算子は独立なものである。

角運動量演算子の間には交換関係

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}L_k \tag{27}$$

$$[M_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}M_k \tag{28}$$

$$[M_i, M_j] = i\epsilon_{ijk}L_k \tag{29}$$

が成立する。（アインシュタインの縮約を用いた。）これらは $so(4)$ 代数の基底を成しており、$SO(4)$ 群を生成する働きを持つ。

以前のノートで計算したように

$$\Delta_{S^3} = -\left(\boldsymbol{L}^2 + \boldsymbol{M}^2\right) \tag{30}$$

が成立する。

さらに

$$\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{M}=0 \tag{31}$$

が成立することがわかる。

3.3 $so(4)$ 代数の基底変換による直和分解

$so(4)$ 代数は独立な $su(2)$ 代数の直和として表現することが出来る。

すなわち基底変換

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{M}\right) \tag{32}$$

$$\boldsymbol{B}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{M}\right) \tag{33}$$

を導入すると交換関係

$$[A_i,A_j]=i\sum_m \epsilon_{ijm}A_m \tag{34}$$

$$[B_i,B_j]=i\sum_m \epsilon_{ijm}B_m \tag{35}$$

$$[A_i,B_j]=0 \tag{36}$$

が成立し、$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ の各成分それぞれが独立に $su(2)$ 代数の基底となって部分代数を成していることが分かる。

3.4　$so(4)$ 代数の既約表現

階数が 2 なので $so(4)$ 代数では独立なカシミール演算子（各基底と交換可能な演算子）が二つ存在する。例えば $\boldsymbol{A}^2$ と $\boldsymbol{B}^2$ を選べる。したがって、$so(4)$ 代数の既約表現を考えたときにその表現空間では $\boldsymbol{A}^2$ や $\boldsymbol{B}$ はスカラーとなる。さらに、その表現空間は $\boldsymbol{A}^2$ の既約表現空間と $\boldsymbol{B}^2$ の既約表現空間の直積となる。

$\boldsymbol{A}$ の成分を基底とする $su(2)$ 代数の既約表現空間は、非負の整数または半整数 l_a で指定され、$\{|l_a, m_a\rangle_a | m_a = -l_a, -l_a+1, \cdots$ のように表される。ただし、$|l_a, m_a\rangle_a$ は $\boldsymbol{A}^2, A_z$ の同時固有状態であり、

$$\boldsymbol{A}^2|l_a, m_a\rangle_a = l_a(l_a+1)|l_a, m_a\rangle_a \tag{37}$$

$$A_z|l_a, m_a\rangle_a = m_a|l_a, m_a\rangle_a \tag{38}$$

である。

同様に $\boldsymbol{B}$ の成分を基底とする $su(2)$ 代数の既約表現空間は、非負の整数または半整数 l_b で指定され、$\{|l_b, m_b\rangle_b | m_b = -l_b, -l_b+1, \cdots, l_b-1, l_b\}$ のように表される。同様に $|l_b, m_b\rangle_b$ は $\boldsymbol{B}^2, B_z$ の同時固有状態であり、

$$\boldsymbol{B}^2|l_b, m_b\rangle_b = l_b(l_b+1)|l_b, m_b\rangle_b \tag{39}$$

$$B_z|l_b, m_b\rangle_b = m_b|l_b, m_b\rangle_b \tag{40}$$

である。

したがって、l_a, l_b を指定したときに、$\boldsymbol{A}$ や $\boldsymbol{B}$ の各固有状態の直積の形で表される $(2l_a+1)(2l_b+1)$ 個の状態からなるヒルベルト空間

$$\{|l_a, m_a\rangle_a |l_b, m_b\rangle_b | m_a = -l_a, -l_a+1, \cdots, l_a-1, l_a, m_b = -l_b, -$$

が $so(4)$ 代数の一つの既約表現に属する。

3.5 表現空間が $L^2(S^3)$ のときの $so(4)$ 代数の既約表現

表現空間が $L^2(S^3)$ のときに既約表現の指標 (l_a, l_b) が取りうる値は、

$$\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{L} = \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{M} = 0 \tag{41}$$

のために制限を受ける。すなわち、

$$\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{B}^2 \tag{42}$$

となり、既約表現は $l_a = l_b$ となるものに制限される。

したがって、$L^2 + M^2$, A_z, B_z の同時固有状態が張る空間が表現空間 $L^2(S^3)$ に対する既約表現空間となり、

$$(\boldsymbol{L}^2 + \boldsymbol{M}^2)|l, m_a\rangle_a |l, m_b\rangle_b = 4l(l+1)|l, m_a\rangle_a |l, m_b\rangle_b \tag{43}$$

$$A_z |l, m_a\rangle_a |l, m_b\rangle_b = m_a |l, m_a\rangle_a |l, m_b\rangle_b \tag{44}$$

$$B_z |l, m_a\rangle_a |l, m_b\rangle_b = m_b |l, m_a\rangle_a |l, m_b\rangle_b \tag{45}$$

を満たしている。

ここで、$n = 2l$ とすると l が非負半整数を取り得たので、n は非負整数を取り得る。n を用いると既約表現の次元は $(2l+1)^2 = (n+1)^2$ となる。

したがって、$\alpha = (m_a, m_b)$ として $Y_{n\alpha} = |n/2, m_a\rangle_a |n/2, m_b\rangle_b$ と書けば、

$$\Delta_{S^3} Y_{n\alpha} = -(\boldsymbol{L}^2 + \boldsymbol{M}^2) Y_{n\alpha} = -n(n+2) Y_{n\alpha} \tag{46}$$

となって式 9 を満たす。

一方、固有値 $-n(n+2)$ となる固有空間の次元は $(n+1)^2$ であるが、

$${}_{n+3}C_n - {}_{n+1}C_{n-2} = (n+1)^2 \tag{47}$$

となるので式 10 を満たす。ただし、$m < 0$ で ${}_nC_m = 0$ である。