四次元空間のラプラシアンの極座標表示 ～角運動量演算子との関係～

adhara*

2017 年 4 月 1 日

1　四次元空間のラプラシアンの極座標表示

1.1　四次元空間のラプラシアン

ラプラシアンは、

$$\Delta_{\boldsymbol{R}^4} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial w^2} \tag{1}$$

(x, y, z, w) はデカルト座標表示である。

1.2　四次元空間の極座標表示

四次元空間の極座標表示 $(r, \alpha, \theta, \phi)$ を導入する。すなわち、

$$(x, y, z, w) = (r \sin\alpha \sin\theta \cos\phi, r \sin\alpha \sin\theta \sin\phi, r \sin\alpha \cos\theta, r \cos\alpha) \tag{2}$$

とする。ただし、$r > 0,\ 0 \leq \alpha < \pi,\ 0 \leq \theta < \pi,\ 0 \leq \phi < 2\pi$ である。

このとき座標の逆変換の式は

$$\begin{pmatrix} r \\ \alpha \\ \theta \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2+z^2+w^2} \\ \arccos\left(\frac{w}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+w^2}}\right) \\ \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1-\mathrm{sgn}(y)}{2}\pi \end{pmatrix} \tag{3}$$

となる。

---

* Twitter @adhara_mathphys

1.3 四次元空間のラプラシアンの極座標表示

直交曲線座標におけるラプラシアンの表示公式を用いると、

$$\Delta_{\boldsymbol{R}^4} = \frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^3\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\Delta_{S^3}}{r^2} \tag{4}$$

となる。ここで、

$$\Delta_{S^3} = \frac{1}{\sin^2\alpha\ \sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\sin^2\alpha\sin\theta\frac{\partial}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\right\} \tag{5}$$

である。新たに導入された Δ_{S^3} は四次元空間内の単位超球面 S^3 上のラプラシアンであり、Laplace-Beltrami 演算子とも呼ばれる。

2 四次元空間における角運動量演算子の球座標表示

2.1 四次元空間における角運動量演算子

四次元空間においては独立な角運動量演算子が 6 個存在する。例えば、

$$L_x = yp_z - zp_y,\ L_y = zp_x - xp_z,\ L_z = xp_y - yp_x \tag{6}$$

$$M_x = xp_w - wp_x,\ M_y = yp_w - wp_y,\ M_z = zp_w - wp_z \tag{7}$$

で定義される角運動量演算子は独立なものである。

角運動量演算子の間には交換関係

$$[L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k \tag{8}$$

$$[M_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}M_k \tag{9}$$

$$[M_i, M_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k \tag{10}$$

が成立する。（アインシュタインの縮約を用いた。）これらは $so(4)$ 代数の基底を成しており、$SO(4)$ 群を生成する働きを持つ。

2.2 直交性

三次元ベクトル演算子 $\boldsymbol{L} = (L_x, L_y, L_z),\ \boldsymbol{M} = (M_x, M_y, M_z)$ を定義する。簡単な計算により

$$\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{M} = 0 \tag{11}$$

が成立することがわかる。実は $\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{L}$ は $so(4)$ 代数における独立な 2 つのカシミール演算子のうちの一つ（もう一つは $\boldsymbol{M}^2 + \boldsymbol{L}^2$）なのだが、消えてしまうことが分かる。

2.3　角運動量演算子の球座標表示

よく使う微分として、

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

がある。これらを用いると、

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{y,z,w} &= \frac{x}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_{\alpha,\theta,\phi} + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{w}{r}\right)^2}}\frac{xw}{r^3}\left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\right)_{r,\theta,\phi} \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{z}{r\sin\alpha}\right)^2}}\frac{xz}{(r\sin\alpha)^3}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)_{r,\alpha,\phi} - \frac{y}{x^2+y^2}\left(\frac{\partial}{\partial \phi}\right)_{r,\alpha,\theta} \qquad (12)\\
\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{x,z,w} &= \frac{y}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_{\alpha,\theta,\phi} + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{w}{r}\right)^2}}\frac{yw}{r^3}\left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\right)_{r,\theta,\phi} \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{z}{r\sin\alpha}\right)^2}}\frac{yz}{(r\sin\alpha)^3}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)_{r,\alpha,\phi} + \frac{x}{x^2+y^2}\left(\frac{\partial}{\partial \phi}\right)_{r,\alpha,\theta} \qquad (13)\\
\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_{x,y,w} &= \frac{z}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_{\alpha,\theta,\phi} + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{w}{r}\right)^2}}\frac{zw}{r^3}\left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\right)_{r,\theta,\phi} \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{z}{r\sin\alpha}\right)^2}}\left(\frac{z^2}{(r\sin\alpha)^3} - \frac{1}{r\sin\alpha}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)_{r,\alpha,\phi} \qquad (14)\\
\left(\frac{\partial}{\partial w}\right)_{x,y,z} &= \frac{w}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_{\alpha,\theta,\phi} + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{w}{r}\right)^2}}\left(\frac{w^2}{r^3} - \frac{1}{r}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\right)_{r,\theta,\phi} \qquad (15)
\end{aligned}$$

となる。

式 2、式 12-15 を用いると、

$$\begin{aligned}
L_x &= \frac{\hbar}{i}\left\{-\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\cos\phi\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right\} \qquad (16)\\
L_y &= \frac{\hbar}{i}\left\{\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin\phi\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right\} \qquad (17)\\
L_z &= \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi} \qquad (18)\\
M_x &= \frac{\hbar}{i}\left\{-\sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\alpha} - \frac{\cos\alpha\cos\theta\cos\phi}{\sin\alpha}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\alpha\sin\phi}{\sin\alpha\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right\} \qquad (19)\\
M_y &= \frac{\hbar}{i}\left\{-\sin\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\alpha} - \frac{\cos\alpha\cos\theta\sin\phi}{\sin\alpha}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\cos\alpha\cos\phi}{\sin\alpha\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right\} \qquad (20)\\
M_z &= \frac{\hbar}{i}\left\{-\cos\theta\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{\cos\alpha\sin\theta}{\sin\alpha}\frac{\partial}{\partial\theta}\right\} \qquad (21)
\end{aligned}$$

となる。

それぞれの二乗の演算子を極座標表示する。L_i^2 については少々の計算により、

$$
\begin{aligned}
L_x^2 &= -\hbar^2 \left\{ \sin^2\phi \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \cos^2\phi \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + 2\sin\phi\cos\phi\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\phi} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\sin\phi\cos\phi}{\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} + \cos^2\phi\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} \right\} \qquad (22) \\
L_y^2 &= -\hbar^2 \left\{ \cos^2\phi \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \sin^2\phi \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} - 2\sin\phi\cos\phi\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\phi} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\sin\phi\cos\phi}{\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} + \sin^2\phi\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} \right\} \qquad (23) \\
L_z^2 &= -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \qquad (24)
\end{aligned}
$$

となる。

M_i^2 については少々長いが、

$$
\begin{aligned}
M_x^2 = -\hbar^2 \Bigg\{ & \sin^2\theta\cos^2\phi\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \left(\frac{\cos\alpha\cos\theta\cos\phi}{\sin\alpha}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \left(\frac{\cos\alpha\sin\phi}{\sin\alpha\sin\theta}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \\
& + 2\sin\theta\cos\theta\cos^2\phi\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\alpha} - \frac{\sin\theta\cos\theta\cos^2\phi}{\sin^2\alpha}\frac{\partial}{\partial\theta} + \cos^2\theta\cos^2\phi\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha} \\
& - 2\sin\phi\cos\phi\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\partial^2}{\partial\phi\partial\alpha} + \frac{\sin\phi\cos\phi}{\sin^2\alpha}\frac{\partial}{\partial\phi} + \sin^2\phi\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha} \\
& - 2\frac{\cos^2\alpha\cos\theta\sin\phi\cos\phi}{\sin^2\alpha\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi\partial\theta} + \frac{\cos^2\alpha\cos\theta\sin^2\phi}{\sin^2\alpha\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos^2\alpha\cos^2\theta\sin\phi\cos\phi}{\sin^2\alpha\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} \Bigg\}
\end{aligned} \tag{25}
$$

$$
\begin{aligned}
M_y^2 = -\hbar^2 \Bigg\{ & \sin^2\theta\sin^2\phi\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \left(\frac{\cos\alpha\cos\theta\sin\phi}{\sin\alpha}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \left(\frac{\cos\alpha\cos\phi}{\sin\alpha\sin\theta}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \\
& + 2\sin\theta\cos\theta\sin^2\phi\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\alpha} - \frac{\sin\theta\cos\theta\sin^2\phi}{\sin^2\alpha}\frac{\partial}{\partial\theta} + \cos^2\theta\sin^2\phi\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha} \\
& + 2\sin\phi\cos\phi\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\partial^2}{\partial\phi\partial\alpha} - \frac{\sin\phi\cos\phi}{\sin^2\alpha}\frac{\partial}{\partial\phi} + \cos^2\phi\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha} \\
& + 2\frac{\cos^2\alpha\cos\theta\sin\phi\cos\phi}{\sin^2\alpha\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi\partial\theta} + \frac{\cos^2\alpha\cos\theta\cos^2\phi}{\sin^2\alpha\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\cos^2\alpha\cos^2\theta\sin\phi\cos\phi}{\sin^2\alpha\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} \Bigg\}
\end{aligned} \tag{26}
$$

$$
\begin{aligned}
M_z^2 = -\hbar^2 \Bigg\{ & \cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \sin^2\theta\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - 2\sin\theta\cos\theta\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\alpha} \\
& + \sin^2\theta\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\alpha}\frac{\partial}{\partial\theta} \Bigg\}
\end{aligned} \tag{27}
$$

となる。

したがって $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{M}$ の二乗の演算子、$\boldsymbol{L}^2$, $\boldsymbol{M}^2$ はそれぞれ

$$\boldsymbol{L}^2 = -\hbar^2\left\{\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right\} \tag{28}$$

$$\boldsymbol{M}^2 = -\hbar^2\left\{\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{\cos^2\alpha\cos\theta}{\sin^2\alpha\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + 2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right\} \tag{29}$$

のように計算される。

3　超球面上ラプラシアンの角運動量演算子による表示

超球面 S^3 上のラプラシアン

$$\Delta_{S^3} = \frac{1}{\sin^2\alpha\ \sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\sin^2\alpha\sin\theta\frac{\partial}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\right\} \tag{30}$$

と、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}^2 + \boldsymbol{M}^2 &= -\hbar^2\left\{\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{1}{\sin^2\alpha}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\sin^2\alpha\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{\cos\theta}{\sin^2\alpha\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + 2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right\} \\ &= -\hbar^2\frac{1}{\sin^2\alpha\ \sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\sin^2\alpha\sin\theta\frac{\partial}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\right\}\end{aligned} \tag{31}$$

を見比べると、

$$\Delta_{S^3} = -\frac{\boldsymbol{L}^2 + \boldsymbol{M}^2}{\hbar^2} \tag{32}$$

がわかる。したがって、

$$\Delta_{\boldsymbol{R}^4} = \frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^3\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{\boldsymbol{L}^2 + \boldsymbol{M}^2}{\hbar^2 r^2} \tag{33}$$

と書ける。

実は $\boldsymbol{L}^2 + \boldsymbol{M}^2$ は $so(4)$ 代数の独立な 2 つのカシミール演算子のもう一つのものである。（もう一つは $\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{L}$）