群の表現論（その１）

～ 定義やいくつかの定理 ～

adhara*

2016 年 12 月 18 日

1　群の表現論に関する事項

1.1　群の表現に関するいくつかの定義

群 G は一般の群とする。V は体 K 上のベクトル空間である。

定義 1. π が群 G から $GL(V)$ への群準同型写像となっているとき、(π, V) は G の表現（representation）であるという。このとき、V は表現空間と呼ばれる。表現の次元とは $\dim(V)$

* Twitter @adhara_mathphys

のことである。有限次元表現とは $\dim(V)$ が有限の値の表現である。表現 (π_1, V_1) と (π_2, V_2) が等価な表現であるとは、V_1 と V_2 が G 同型 であることを指す。[*1]

群 G の表現 (π, V) を考える。

定義 2. 表現空間 V の部分空間 W（$W \subset V$）が G 不変（あるいは G の作用に対して固定される）とは、$\forall g \in G, \forall w \in W, \pi(g)w \in W$ が成立することである。

表現空間 V の部分空間 W が G 不変であるとき、各 $g \in G$ に対して $\pi(g)$ が作用するベクトル空間を W に制限した線形写像 $\pi|_W(g)(\in GL(W))$ を考えることが出来る。このとき、π_W を G から $GL(W)$ への準同型写像と考えることが出来る。すなわち、(π_W, W) は G の表現である。

定義 3. 上記の状況のとき、(π_W, W) は (π, V) の部分表現である、という。簡単に π_W は π の部分表現である、という場合もある。

さらに有限生成の表現というものが定義できる。

[*1] φ が V_1 から V_2 への G 準同型とは $V_1 \to V_2$ の線形写像であり、$\rho_2(g)\varphi(v_1) = \varphi(\rho_1(g)v_1)$ $(g \in G, v_1 \in V_1)$ を満たすもののことである。φ が全単射のとき G 同型写像である、という。$V_1 \to V_2$ の G 同型写像が存在するとき、V_1 と V_2 は G 同型であるという。

定義 4. 有限個の元 $v_1, v_2, \cdots, v_m \in V$ が存在して、$V = \mathrm{Span}\{\pi(g)v_j | 1 \leq j \leq m, g \in G\}$ と書けるとき、G の表現 (π, V) が有限生成である、という。$v_1, v_2, \cdots, v_m$ を生成元と呼ばれる。

有限生成の表現は有限次元表現とは限らない。

定義 5. 群 G の表現 (π, V) に対して、G 不変となる V の部分空間が自明なもの（すなわち $\{0\}$ と V 自身）に限られるとき、(π, V) は既約表現（irreducible representation）である、という。さらに π が既約表現である、V が既約部分空間である、などという。（表現は KG 環上の加群と考えることが出来る。加群の用語を用いると V が KG 単純加群であるという。）既約表現でない表現を可約表現（reducible representation）という。

極大 G 不変部分空間あるいは極大部分表現という概念がある。

定義 6. (π, V) の部分表現 $(\pi|_W, W)$ を考える。W を含むような V の G 不変部分空間が V と W 以外にないとき、W は V の極大 G 不変部分空間である、$(\pi|_W, W)$ は (π, V) の極大部分表現である、という。

この定義に依れば V 自体は V の自明な極大 G 不変部分空

間である。また (π, V) が既約であれば $\{0\}$ も V の極大 G 不変部分空間である。

群 G に対して表現をいくつか考えると（等価な表現が含まれていても良いので常に複数考えることが出来る)、直和表現というものが定義できる。

定義 7. (π_i, V_i) $(i = 1, 2, \cdots, l)$ をそれぞれ G の表現とする。直和ベクトル空間 $V = \sum_{i=1}^{l} V_k$ を考える。（直和の定義により、任意の元 $v \in V$ に対して $v = v_1 + v_2 + \cdots v_l$ となる $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2, \cdots, v_l \in V_l$ が一意に存在する。）このとき、$\pi(g)(v) := \pi_1(g)(v_1) + \cdots \pi_2(g)(v_2) + \cdots \pi_l(g)(v_l)$ によって、準同型写像 $\pi : G \to GL(V)$ を定義すると、(π, V) も G の表現となるが、このことを表現 π が表現 $\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_l$ の直和となっている、という。

上の定義だと有限の直和表現であったが、無限の直和表現も考えることが可能である。

表現が直和となっているかどうかは重要な概念である。

定義 8. 表現 (π, V) が完全可約（completely reducible）であるとは、π が既約表現の直和として表現できることをいう。（加群の言葉を用いると V が半単純加群（semisimple module)。）

W を V の G 不変部分空間、W' を W の G 不変部分空間

とする。

$w_1, w_2 \in W$ に対して、$w_1 \sim w_2 \iff w_1 - w_2 \in W'$ で同値関係を定義する。この同値関係で定まる $w \in W$ の同値類は $\{w + z | z \in W'\}$ であるがこれを $w + W'$ と記す。この同値関係で定まる W の商集合を W/W' で表す。すなわち、

$$W/W' = \{w + W' | w \in W\}$$

である。

$w_1 + W', w_2 + W' \in W/W'$ に対して $(w_1 + W') + (w_2 + W') = (w_1 + w_2) + W'$ とするように和演算を定義することが出来る。また $a \in K, w \in W$ に対して $a(w+W') = aw+aW'$ とするようにスカラー倍を定義することが出来る。スカラー倍と和演算について閉じているので W/W' は商ベクトル空間と見なせる。

商ベクトル空間 W/W' に対する表現を $(\pi|_W, W), (\pi_{W'}, W')$ から構成することが出来る。任意の $w + W' \in W/W'$、任意の $g \in G$ に対して、次の性質を満たす群準同型 $\pi|_{W/W'} : g \to GL(W/W')$ を定義できる。

$$\pi|_{W/W'}(g)(w + W') = (\pi|_W(g)(w)) + W'$$

(W, W' が G 不変部分空間であることから well-defined である。)

定義 9. 上で定義された群準同型と G 不変部分空間の商ベクトル空間の組 $(\pi|_{W/W'}, W/W')$ を (π, V) の部分商表現という。とくに $W = V$ であるときは (π, V) の商表現と呼ばれる。（(部分）剰余表現とも）

$\pi|_{V/V}$ といった自明な（部分）商表現もあるが、商表現といったときにはこれを含めないこととする。

1.2 群の表現に関するいくつかの定理

補題 10. 群 G の有限次元表現 (π, V) を考える。このとき π には既約な部分表現が存在する。

証明. (π, V) が既約ならばその時点で証明終了。(π, V) が可約であるとする。可約なので V の G 不変部分空間 W_1 が存在して $W_1 \neq \{0\}, V$ である。$(\pi|_{W_1}, W_1)$ が既約ならばその時点で終了。$(\pi|_{W_1}, W_1)$ が可約ならば W_1 の G 不変部分空間 W_2 が存在して $W_2 \neq \{0\}, V$ である。このとき $\dim(W_2) < \dim(W_1) < \dim(V)$ である。$\dim(V)$ が有限なのでこのようにしてできる G 不変部分空間の列には終わりがある。すなわちある k が存在し、G 不変部分空間の列 $\{0\} \neq W_k \subsetneq W_{k-1} \subsetneq \cdots \subsetneq W_1 \subsetneq V$ ができる。このとき $(\pi|_{W_k}, W_k)$ が既約表現である。 $\square$

商表現について次の主張が成立する。

補題 11. 群 G の表現 (π, V) の部分表現 $(\pi|_W, W)$ を考える。これらの表現により定まる商表現 $(\pi|_{V/W}, V/W)$ の部分表現は、W を含む V の G 不変部分空間 X を用いて、$(\pi|_{X/W}, X/W)$ と表すことが出来る。商表現 $(\pi|_{V/W}, V/W)$ の部分表現と W を含む V の G 不変部分空間は一対一対応する。

証明. V/W の G 不変部分空間 U を考える。この U に対して V の部分空間 $X = \{x \in V | x + W \in U\}$ を考える。このとき X は V の G 不変部分空間であることが分かる。また X が W を G 不変部分空間として持つことも分かる。さらに $U = X/W$ であることも分かる。逆に V の G 不変部分空間で W を含むものを X としたとき、X/W が V/W の G 不変部分空間であることが示せる。したがって一対一対応が示せた。 □

上記の補題より極大部分表現に対して重要な主張が成立する。

系 12. 群 G の表現 (π, V) の部分表現 $(\pi|_W, W)$ が極大であることと商表現 $(\pi|_{V/W}, V/W)$ が既約であることは同値。

集合論の定理として Zorn の補題がある。（ここでは証明し

ない）

補題 13. （Zorn の補題）$\mathcal{S}$ を空ではない順序集合とする。$\mathcal{S}$ の任意の全順序部分集合が $\mathcal{S}$ において上界をもつならば、$\mathcal{S}$ は極大元（順序関係によると比較をしたときそれより大きな元をもたないもの）をもつ。

補題 14. 群 G の表現 (π, V) に対して次の二項目が成立する。

1. π が有限生成ならば π は既約な商表現をもつ。

2. π は既約な部分商表現をもつ。

証明.（1）(π, V) を有限生成表現とする。V のすべての G 不変の真部分空間の集合 $\mathcal{W}$ を考える。$\mathcal{W}$ は空ではない。また $\mathcal{W}$ においては包含関係によって順序を定めることが出来るので $\mathcal{W}$ は順序集合である。$\mathcal{W}$ に属する任意の全順序集合 $\mathcal{W}'$ を考える。全順序集合なので $\mathcal{W}'$ の全要素 $W_1', W_2', \cdots$ は $W_1' \subset W_2' \subset \cdots$ のように順序関係の列を構成する。和空間 $\cup_{k \geq 1} W_k'$ を考えるとこれは V の真部分空間でなくてはならない。（$\cup_{k \geq 1} W_k' = V$ と仮定する。V は有限生成なのである n が存在し、W_n' はすべての V の生成元を含む。すなわち $W_n' = V$ となる。これは $W_n' \in W$ であることと矛盾。）したがって $\cup_{k \geq 1} W_k'$ は全順序集合 $\mathcal{W}'$ における上界である。$\mathcal{W}'$ は任意であったから Zorn の補題より $\mathcal{W}$ には極大元 W_0 が存

在し、これは非自明な（V ではないという意味）極大の G 不変の真部分空間である。系 12 より $(\pi_{V/W}, V/W)$ は既約な部分商表現である。

（2）V に属するゼロでない元を一つ選び v とする。v を生成元とする V の G 不変部分空間 $W := \mathrm{Span}\{\pi(g)v | g \in G\}$ について（1）を適用すればよい。 $\square$

補題 15. 群 G の表現 (π, V) に既約な部分表現が存在すると仮定する。このとき次の二項目は同値である。

1. (π, V) は完全可約である。

2. V の任意の G 不変の部分空間 W に対して、

$$W \oplus W' = V$$

を満たす G 不変の部分空間 W' が存在する

証明.（$1 \to 2$）π を完全可約であるとする。π が既約ならばその時点で証明終了。π を可約とする。$W(\neq \{0\}, V)$ を G 不変の部分空間とする。π は完全可約なので V の G 不変部分空間 U が存在し $U \cap W = \{0\}$ となる。このような性質を持つ部分空間の集合 $\mathcal{U}$ を考える。$\mathcal{U}$ は空ではなく、要素同士の和操作について閉じている（要するに $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ ならばその和空間も $\mathcal{U}$ に属する）。したがって Zorn の補題により要素同士の和操作に関して極大となる、$\mathcal{U}$ の要素が存在する。極大と

なる要素の一つを U_0 とする。$W \cap U_0 = \{0\}$ なので両者の直和を考えることができる。ここで $W \oplus U_0 \neq V$ と仮定する。π は完全可約であったので V のある G 不変部分空間 U' が存在し $U' \not\subset W \oplus U_0$ となりかつ $(\pi|_{U'}, U')$ が既約となる。ここで $A = U' \cap (W \oplus U_0) \neq \{0\}$ とする（A は U' の真部分空間となる)。U' と $W \oplus U_0$ がそれぞれ G 不変なので $a \in A$ のとき任意の $g \in G$ に対して $\pi(g)a \in U'$ かつ $\pi(g)a \in W \oplus U_0$ 、すなわち $\pi(g)a \in A$ となる。すなわち A は G 不変の U' の真部分空間である。これは U' が既約部分空間であることに反する。したがって $A = U' \cap (W \oplus U_0) = \{0\}$ となる。すなわち $U' \cap W = \{0\}$ であり $U' \in \mathcal{U}$ となる。一方 $U' \not\subset U_0$ であった。これは U_0 が極大であったことに反する。($U' + U_0 \in \mathcal{U}$ は U_0 を真部分集合として含む）

（$2 \to 1$）2 が成立しているとする。既約部分空間 W_1 が存在する。$W^{(1)} = W_1$ とする。さらに W_1 と直交する既約部分空間 W_2 が存在するとき、$W^{(2)} = W^{(1)} \oplus W_2$ とする。さらに W_1 とも W_2 とも直交する既約部分空間 W_3 が存在するとき、$W^{(3)} = W^{(2)} \oplus W_2$ とする。このようにして既約部分空間の直和の列 $W^{(1)} \subset W^{(2)} \subset W^{(3)} \subset \cdots \subset V$ を考えることが出来る。Zorn の補題を適用すると、この列には極大が存在する。この極大を W とする。W は既約部分空間の直和なので G 不変部分空間である。したがって仮定（2）より不変部分空

間 U が存在し、$W \oplus U = V$ である。$U = \{0\}$ であればその時点で証明終了。$U \neq \{0\}$ とする。補題 14 を用いると、不変 G 部分空間の包含関係 $U \supset U_1 \supset U_2$ を満たす U_1, U_2 が存在し、$\pi|_{U_1/U_2}$ は既約となる。$W \oplus U_2$ は V の G 不変部分空間であるが、仮定（2）よりその補集合 U_3 も G 不変である。（$U_3 \subset U$ である。）したがって $\pi|_{U_3}, \pi|_{V/(W \oplus U_2)}, \pi|_{U/U_2}$ といった表現は等価である（W, U, V, U_2, U_3 がすべて G 不変なので）。とくに $\pi|_{U_1/U_2}$ は $\pi|_{U/U_2}$ の既約部分表現である。$\pi|_{U_3}$ と $\pi|_{U/U_2}$ が等価であることから $(\pi|_{U_3}, U_3)$ の既約部分表現 $(\pi|_{U_4}, U_4)$ が存在することが分かる（U_4 は U_3 の不変部分空間）。これは W の極大性に反する。したがって $U = \{0\}$ である。 □

2　群のユニタリ表現といくつかの事項

表現空間が内積空間である場合がある。とくに内積が群（の表現としての線形写像）が作用しても保たれて欲しい場合がある。このような性質をみたす表現をユニタリ表現と言う。内積の正定値性が意味を持つために $K = \boldsymbol{R}$ または $K = \boldsymbol{C}$ とする。

群 G の表現 (π, V) を考える。

定義 16. (π, V) が有限次元表現であるとする。さらに V が内

積空間であるとする。ある内積 $\langle , \rangle$ が存在し $\forall v_1, v_2 \in V, \forall g \in G : \langle \pi(g)v_1, \pi(g)v_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$ となるとき、この表現をユニタリ表現であるという。

無限次元の内積空間もある。このときは上記と同様の定義の条件を満たす表現を前ユニタリ表現という。内積より定まるノルムに関して完備であるときは V はヒルベルト空間となるが、このときの前ユニタリ表現をユニタリ表現という。

V をベクトル空間として A を V における線形写像とする（$A \in \mathrm{End}(V)$）。A の随伴写像 $A^\dagger$ とは任意の $v, w \in V$ に対して $\langle Av, w \rangle = \langle v, A^\dagger w \rangle$ となる V における線形写像である。上記の定義より (π, V) がユニタリ表現であることは任意の $g \in G$ に対して $\pi(g)^* = \pi(g)^{-1} (= \pi(g^{-1}))$ であることと同値である。V が $\boldsymbol{C}$ ベクトル空間であるとき、基底を用いて行列表示すると、

$$(A^\dagger)_{ij} = A^*_{ji} \quad (\ast\text{は複素共役}) \tag{1}$$

である。

補題 17. (π, V) が G のユニタリ表現で、W が V の部分空間である。このとき次の二項目は同値。

1. W が G 不変であること。

2. $W^\perp$ が G 不変であること。

証明. W が G 不変部分空間である。 $\iff$ $\forall g \in G, \forall w \in W : \pi(g)w \in W$ $\iff$ $\forall g \in G, \forall w \in W, \forall w' \in W^\perp : \langle \pi(g)w, w' \rangle = 0$ $\iff$ $\forall g \in G, \forall w \in W, \forall w' \in W^\perp : \langle w, \pi(g^{-1})w' \rangle = 0$ $\iff$ $\forall g \in G, \forall w \in W, \forall w' \in W^\perp : \langle w, \pi(g)w' \rangle = 0$ $\iff$ $\forall g \in G, \forall w' \in W^\perp : \pi(g)w' \in W^\perp$ $\iff$ $W^\perp$ が G 不変部分空間である。 $\square$

次の系が従う。

系 18. 群 G の有限次元ユニタリ表現は完全可約である。