群の表現論（その２）

～ Schur の補題と有限群における Schur の直交性 ～

adhara*

2016 年 12 月 18 日

1　Schur の補題

補題 1. (π_1, V_1) と (π_2, V_2) をそれぞれ群 G の既約表現とする。任意の G 準同型 $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$ は同型となるか 0 写像（$\mathrm{Im}A = \{0\}$ となる写像）である。

証明. $A \in \mathrm{Hom}_G(V_1, V_2), A \neq 0$ とする。
$g \in G, v_2 \in \mathrm{Im}A \subset V_2, v_2 \neq 0$ とすると、$A(v_1) = v_2$ となる $v_1 \in V_1$ が存在する。A は G 準同型であるから、$A(\pi_1(g)v_1) = \pi_2(g)A(v_1) = \pi_2(g)v_2$ が成立し、$\pi_2(g)v_2 \in \mathrm{Im}A$ である。し

* Twitter @adhara_mathphys

たがって $\mathrm{Im}A \neq \{0\}$ は V_2 の G 不変部分空間である。しかしながら (π_2, V_2) は既約表現なので自明な不変部分空間しか持たず、$V_2 = \mathrm{Im}(A)$、すなわち A は全射となる。
さて $v_1' \in \mathrm{Ker}A$ とすると A は G 準同型であるから、任意の $g \in G$ に対して $A(\pi_1(g)v_1') = \pi_2(g)A(v_2') = \pi_2(g)0 = 0, \pi_1(g)v_1' \in \mathrm{Ker}A$ が成立する。すなわち、$\mathrm{Ker}A \in V_1$ は G 不変部分空間である。$A \neq 0$ より $\mathrm{Ker}A \neq V_1$ であり、(π_1, V_1) が既約であることから、$\mathrm{Ker}A = \{0\}$ である。すなわち A は全単射であり G 同型であることが示された。 □

上記の補題はとくに有限次元既約表現に限らない。また有限群にも限っていない。完全可約表現にも限らない。

表現 (π, V) に対して自己 G 準同型の集合は $\mathrm{End}_G(V)$ と書かれる。（$\mathrm{End}_G(V) := \mathrm{Hom}_G(V, V)$ である。）

以下、V を $\boldsymbol{C}$ 上のベクトル空間とする。

系 2. 群 G の有限次元既約表現 (π, V) に対して、$\mathrm{End}_G(V) \simeq \boldsymbol{C}$ である。（任意の元 $\mathrm{End}_G(V)$ が $\lambda \in \boldsymbol{C}$ を用いて λI_V と書ける。ただし I_V は $V \to V$ の恒等写像）

証明. $A \in \mathrm{End}_G(V)$ とする。A は $V \to V$ の線形写像であり、V が有限次元であることと $\boldsymbol{C}$ が代数的閉体であることから、少なくとも一つの固有値 $\lambda \in \boldsymbol{C}$ をもつこととなる。ここで任意の $g \in G, v \in V$ に対して $(A - \lambda I_V)(\pi(g)v) =$

$A(\pi(g)v) - \lambda I_V(\pi(g)v) = \pi(g)A(v) - \pi(g)v = \pi(g)(A(v) - v) = \pi(g)(A-\lambda I_V)(v)$ なので、$A-\lambda I_V \in \mathrm{End}_G(V)$ である。そして $A - \lambda I_V$ は逆行列を持たないので自己同型ではない。Schur の補題より $\mathrm{End}_G(V)$ の元は自己同型か 0 写像なので、$A - \lambda I_V$ は 0 写像である。すなわち $A = \lambda I_V$ である。 □

アーベル群に対しては次のような系が従う。

系 3. アーベル群 G の有限次元既約表現 (π, V) に対して $\mathrm{dim}V = 1$ である。

証明. 任意の $g, g' \in G, v \in V$ に対して $\pi(g)(\pi(g')v) = \pi(gg')v = \pi(g'g)v = \pi(g')(\pi(g)v)$ となるので、$\pi(g) \in \mathrm{End}_G(V)$ である。したがって上の系よりある $\lambda(g) \in C$ が存在し、$\pi(g) = \lambda(g)I_V$ である。V の基底として $e_1, e_2, \cdots, e_{\mathrm{dim}V}$ を考える。このとき $\{\boldsymbol{C}e_1\}$ は V の G 不変部分空間である。$\mathrm{dim}V > 1$ だと自明でない G 不変部分空間を持つことになり (π, V) が既約であることに反する。したがって $\mathrm{dim}V = 1$ である。 □

完全可約で各既約成分が有限次元となる表現に対しては、シューアの補題だけではなくシューアの補題の逆も成立する。

補題 4. 群 G のが完全可約表現 (π, V) の各既約成分が有限次元であるとき、以下の項目は同値である。

1. (π, V) は既約表現である。

2. $\mathrm{End}_G(V) \simeq \boldsymbol{C}$ である。（別の言い方：任意の $g \in G$ に対して $\pi(g)$ と可換となる $\mathrm{End}(V)$ の元はスカラー写像に限られる。）

証明. $(1 \to 2)$ はシューアの補題そのものである。

$(2 \to 1)$ を背理法により示す。V を可約であるとする。すると V は二つ以上の G 不変部分空間の直和となる。それぞれ $W_1, W_2, \cdots$ とする。このとき演算子 $P_{W_1} := 1_{W_1} \oplus 0_{W_2} \oplus \cdots \oplus 0_{W_n} \oplus \cdots$ について考える。任意の $v \in V$ は $v = w_1 + w_2 + \cdots,\ (w_i \in W_i)$ の形に一意に表されるが、$P_{W_1} v = w_1$ となりこれは射影演算子であることがわかる。このとき、

$$
\begin{aligned}
P_{W_1}\pi(g)v &= P_{W_1}(\pi|_{W_1}(g)w_1 + \pi|_{W_2}(g)w_2 + \cdots) \\
&= P_{W_1}\pi|_{W_1}(g)w_1 + P_{W_1}\pi|_{W_2}(g)w_2 + \cdots \\
&= \pi|_{W_1}(g)w_1 + 0 + \cdots \\
&= \pi(g)w_1 \\
&= \pi(g)P_{W_1}v
\end{aligned}
$$

が成立する（三つ目の等号では W_i が G 不変部分空間であることが使用されている。）。すなわち $P_{W_1} \in \mathrm{End}_G(V)$ である。一方 P_{W_1} は V の恒等写像 I_V のスカラー倍ではない。すなわち $\mathrm{End}_G(V)$ の元のうち恒等写像のスカラー倍でないものが見つかった。 □

2　有限群に対する Schur の直交性

本節では有限群の $\boldsymbol{C}$ 上内積空間に対する表現を考える。

定理 5. 有限群の表現はユニタリ表現である。

証明. 有限群 G の表現 (π, V) を考える。$G = \{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$ とする。V における任意の内積 $\langle , \rangle_1$ （ユニタリ条件を満たしている必要がないが、内積の要件を満たす必要は当然ある）を一つ定める。ここからユニタリ条件を満たす内積を構成できることを示す。ベクトル空間における形式 $\langle , \rangle : V \times V \to \boldsymbol{C}$ を

$$\forall v, w \in V : \langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \pi(g_i)v, \pi(g_i)w \rangle_1$$

により定義する。任意の $v \in V$ に対して

$$\langle v, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \pi(g_i)v, \pi(g_i)w \rangle_1$$

である。また、$v \neq 0$ ならば $\forall g \in G : \pi(g)v \neq 0$ であり（$\pi(g) \in GL(V)$ なので）、$\forall g \in G : \langle \pi(g), \pi(g) \rangle_1 > 0$ であることが分かる（$\langle , \rangle_1$ は内積であり非退化正定値性をもつので）。したがって、$v \neq 0$ ならば $\langle v, v \rangle > 0$ であり、$\langle , \rangle$ が非退化正定値性を持つことが分かる。さらに $\pi(g)$ が線形写像であ

ることから $\langle , \rangle$ の双線形性やエルミート性等も容易に示せる。したがって $\langle , \rangle$ は内積となる。また、任意の $v, w \in V, g \in G$ に対して、

$$
\begin{aligned}
\langle \pi(g)v, \pi(g)w \rangle &= \sum_{i=1}^{n} \langle \pi(g_i)\pi(g)v, \pi(g_i)\pi(g)w \rangle_1 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \pi(g_i g)v, \pi(g_i g)w \rangle_1 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \pi(g_i)v, \pi(g_i)w \rangle_1 \\
&= \langle v, w \rangle
\end{aligned}
$$

が成立する、すなわちユニタリ条件が満たされている。 □

上記の定理と別ノートで示した「有限次元ユニタリ表現は完全可約（半単純）である」を用いると次の定理が従う。

定理 6. 有限群の有限次元表現は完全可約である。

次の定理は Schur の直交性と呼ばれるものである。この定理は大直交定理とも呼ばれる。指標表の作成に役立つ指標直交性定理を導くことが出来る、有用な定理である。

定理 7. 有限群 G に対して (π_1, V_1) と (π_2, V_2) がそれぞれ有限次元完全可約表現であるとする。ベクトル空間 V_1, V_2 に対

してある基底をそれぞれ定めて、その基底で $\pi_i(g)$ を a^i_{jk} のように行列表示するものとする。このとき、

1. $\pi_1 \not\simeq \pi_2$（G 同型ではない、すなわち表現が同等ではないの意味）ならば、

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} a^1_{jk}(g)a^2_{ml}(g^{-1}) = 0$$

が成立する。

2.
$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} a^1_{jk}(g)a^1_{ml}(g^{-1}) = \frac{\delta_{km}\delta_{jl}}{\mathrm{dim}V_1}$$

証明. $B \in \mathrm{Hom}(V_2, V_1)$ とする。$A := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\pi_1(g)B\pi_2(g)^{-1}$ とおくと $A \in \mathrm{Hom}(V_2, V_1)$ である。ここで任意の $g' \in G$ に対して、

$$\begin{aligned}
\pi_1(g')A &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\pi_1(g')\pi_1(g)B\pi_2(g)^{-1} \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\pi_1(g'g)B\pi_2(g^{-1}) \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g''\in G}\pi_1(g'')B\pi_2((g'^{-1}g'')^{-1}) \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g''\in G}\pi_1(g'')B\pi_2(g''^{-1}g') \\
&= A\pi_2(g')
\end{aligned}$$

であり、A と G の作用は可換である。したがって $A \in \mathrm{Hom}_G(V_2, V_1)$ である。Schur の補題により $\pi_1 \not\simeq \pi_2$ のときは $A = 0$ であり、いずれの基底で表示しても行列要素はすべて 0 である。定めた基底に対する A の行列要素は $A_{jl} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_{\mu=1}^{n_1}\sum_{\nu=1}^{n_2} a^1_{j\mu}(g)b_{\mu\nu}a^2_{\nu l}(g^{-1})$ である（$n_i = \mathrm{dim}V_i$ とした。$b_{\mu\nu}$ は同基底による B の行列要素）。上記の主張は B によらないがとくに行列要素が $b_{\mu\nu} = \delta_{\mu k}\delta_{\nu m}$ となるように選ぶと、

$$0 = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} a^1_{jk}(g)a^2_{ml}(g^{-1})$$

が導かれる。

次に $\pi_1 = \pi_2$ で基底も同じにとる（$V_1 = V_2 = V$ とおく。$n = \mathrm{dim}V$ とする。）。このとき Schur の補題より $A = \lambda I_V$ なる $\lambda(B) \in \boldsymbol{C}$ が存在する。定めた基底に対して行列要素は $A_{jl} = \lambda\delta_{jl}$ となる。先と同様に B を行列要素が $b_{\mu\nu} = \delta_{\mu k}\delta_{\nu m}$ となるように選ぶと、（このときの λ を $\lambda(\{b_{\mu\nu} = \delta_{\mu k}\delta_{\nu m}\})$ と書く。）

$$\begin{aligned}\lambda(\{b_{\mu\nu} = \delta_{\mu k}\delta_{\nu m}\})\delta_{jl} &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} a^1_{jk}(g)a^1_{ml}(g^{-1}) \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} a^1_{jk}(g)(a^1)^{-1}_{ml}(g)\end{aligned}$$

となる。行列のトレースを取る操作を行うと、

$$\begin{aligned}\lambda(\{b_{\mu\nu}=\delta_{\mu k}\delta_{\nu m}\})\sum_{i=1}^{n}\delta_{ii}&=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}a^{1}_{ik}(g)(a^{1})^{-1}_{mi}(g)\\&=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\delta_{km}=\delta_{km}\end{aligned}$$

よって、

$$\lambda(\{b_{\mu\nu}=\delta_{\mu k}\delta_{\nu m}\})=\frac{\delta_{km}}{n}$$

以上より、

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}a^{1}_{jk}(g)a^{1}_{ml}(g^{-1})=\frac{\delta_{km}\delta_{jl}}{n}$$

が成立する。 □

有限群 G の有限次元表現 (π, V) はユニタリ表現であるから、ユニタリ条件を満たすように V に内積を導入することが出来る。とくに基底として内積から定まる正規直交基底を選ぶと、この基底による表示では任意の $g\in G$ に対して $\pi(g)$ がユニタリ行列となる。すなわち $\pi(g)$ の行列要素を $a_{ij}(g)$ とすると、$a_{ij}(g^{-1})=a^{-1}_{ij}(g)=(a_{ji}(g))^{*}$ が成立する。（第一等号は $\pi(g)$ の逆写像が $\pi(g^{-1})$ であることを用いている。）上記の定理と合わせて次の系が成立する。

系 8. 有限群 G の有限次元表現 (π, V) を考える。ユニタリ条件を満たすように V に内積を導入し、基底として内積から定まる正規直交基底を選ぶ。$\pi(g)$ の行列要素を $a_{ij}(g)$ とすると、

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} a^1_{jk}(g)(a^1_{lm}(g))^* = \frac{\delta_{km}\delta_{jl}}{n}$$

が成立する。