複素構造から見た $\mathrm{U}(p,q) = \mathrm{O}(2p,2q) \cap \mathrm{Sp}(2p+2q,\mathbb{R})$

adhara_mathphys

2026 年 4 月 25 日

概要

本ノートでは，不定値ユニタリ群

$$\mathrm{U}(p,q)$$

を，実ベクトル空間上の対称双線形形式とシンプレクティック形式を同時に保存する群として実現する．より具体的には，$\mathbb{C}^{p+q}$ を $\mathbb{R}^{2p+2q}$ と見なし，エルミート形式の実部と虚部からそれぞれ対称形式と交代形式を取り出すことで，

$$\mathrm{U}(p,q) = \mathrm{O}(2p,2q) \cap \mathrm{Sp}(2p+2q,\mathbb{R})$$

が得られることを説明する．また，この交わりが複素構造の中心化群としても記述できることを示す．

なお，本ノートの基本的なアイデアと数式上の骨格は adhara_mathphys が用意したものであり，本文の構成，記法の整理，および LaTeX 原稿としての整形には生成 AI を補助的に用いた．最終的な内容の確認と責任は adhara_mathphys に属する．

目次

1　設定

　$n=p+q$ とおく．まず
$$H=\mathrm{diag}(\underbrace{1,\dots,1}_{p},\underbrace{-1,\dots,-1}_{q})$$
を n 次元実対角行列とする．この行列は $\mathbb{C}^n$ 上の不定値エルミート形式
$$h(z,w)=z^\dagger Hw$$
を定める．ここで
$$z^\dagger=\overline{z}^{\,t}$$
である．

　このエルミート形式を保存する複素線形変換全体が
$$\mathrm{U}(p,q)=\{\,M\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})\mid M^\dagger HM=H\,\}$$
である．これを不定値ユニタリ群という．特に $q=0$ の場合には，通常のユニタリ群
$$\mathrm{U}(n)=\mathrm{U}(n,0)$$
が得られる．

　一方，$\mathbb{C}^n$ を実ベクトル空間 $\mathbb{R}^{2n}$ と同一視する．具体的に
$$z=x+\mathrm{i}y,\qquad x,y\in\mathbb{R}^n$$
と書き，z を
$$X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2n}$$
に対応させる．

　この同一視のもとで，複素行列
$$M=A+\mathrm{i}B,\qquad A,B\in M_n(\mathbb{R})$$
は実行列
$$\rho(M)=\begin{pmatrix}A&-B\\B&A\end{pmatrix}\in M_{2n}(\mathbb{R})$$
として表される．

　以下では，必要に応じてこの実化埋め込み
$$\rho:\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})\hookrightarrow\mathrm{GL}(2n,\mathbb{R})$$

を通じて，$\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ の部分群を $\mathrm{GL}(2n,\mathbb{R})$ の部分群と同一視する．したがって，本ノートで書く等式

$$\mathrm{U}(p,q) = \mathrm{O}(2p,2q) \cap \mathrm{Sp}(2p+2q,\mathbb{R})$$

は，より厳密には

$$\rho(\mathrm{U}(p,q)) = \mathrm{O}(2p,2q) \cap \mathrm{Sp}(2p+2q,\mathbb{R})$$

という意味である．

以下，

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

とする．また，

$$G = I_2 \otimes H = \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix}, \qquad \Omega = J \otimes H = \begin{pmatrix} 0 & H \\ -H & 0 \end{pmatrix}$$

とおく．ここで $\otimes$ はクロネッカー積である．

行列 G は符号数 $(2p,2q)$ の対称双線形形式を表す．一方，Ω は非退化交代形式，すなわちシンプレクティック形式を表す．

したがって，

$$\mathrm{O}(G) = \{\, T \in \mathrm{GL}(2n,\mathbb{R}) \mid T^t G T = G \,\}$$

は $\mathrm{O}(2p,2q)$ と同型であり，

$$\mathrm{Sp}(\Omega) = \{\, T \in \mathrm{GL}(2n,\mathbb{R}) \mid T^t \Omega T = \Omega \,\}$$

は実シンプレクティック群と同型である．

本ノートでは，この具体的な形式 G, Ω に関する群として

$$\mathrm{O}(2p,2q) = \mathrm{O}(G), \qquad \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R}) = \mathrm{Sp}(\Omega)$$

と書く．つまり，ここでの $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ は標準形ではなく，$\Omega = J \otimes H$ を保存する群として表示している．

2　エルミート形式の実部と虚部

$z = x + \mathrm{i}y$, $w = u + \mathrm{i}v$ と書く．ただし

$$x, y, u, v \in \mathbb{R}^n$$

である．このとき

$$\begin{aligned} h(z,w) &= (x^t - \mathrm{i}y^t) H (u + \mathrm{i}v) \\ &= x^t H u + y^t H v + \mathrm{i}\{x^t H v - y^t H u\}. \end{aligned}$$

したがって,

$$\operatorname{Re} h(z,w) = x^t H u + y^t H v,$$

$$\operatorname{Im} h(z,w) = x^t H v - y^t H u$$

である．

実ベクトル

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

を用いると,

$$\operatorname{Re} h(z,w) = X^t G Y, \qquad \operatorname{Im} h(z,w) = X^t \Omega Y$$

と書ける．

つまり，エルミート形式は実双線形形式の言葉では

$$h = g + \mathrm{i}\omega$$

と分解される．ここで

$$g(X,Y) = X^t G Y, \qquad \omega(X,Y) = X^t \Omega Y$$

である．

この意味で，不定値ユニタリ群 $\mathrm{U}(p,q)$ は，実部 g と虚部 ω を同時に保存する変換群として理解できる．

3 複素構造

次に

$$K = J \otimes I_n = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

とおく．これは

$$K^2 = -I_{2n}$$

を満たすので，$\mathbb{R}^{2n}$ 上の複素構造を定める．

注意として，この K は，通常の同一視 $z = x + \mathrm{i}y$ における i 倍ではなく，符号の取り方によって $-\mathrm{i}$ 倍に対応している．しかし，中心化群を考える上ではこの符号は本質的ではない．

重要なのは,

$$\Omega = GK$$

が成り立つことである．実際,

$$(I_2 \otimes H)(J \otimes I_n) = J \otimes H = \Omega.$$

また $H^{-1} = H$ なので，

$$K = G^{-1}\Omega$$

でもある．

この等式は，対称形式 g とシンプレクティック形式 ω を同時に与えると，その合成として複素構造 K が回復されることを意味している．すなわち，

$$K = g^{-1}\omega$$

という関係が成り立っていると見ることができる．

4　複素行列の実化

複素行列

$$M = A + \mathrm{i}B, \qquad A, B \in M_n(\mathbb{R})$$

に対して，その実化を

$$\rho(M) = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R})$$

で定める．これは標準的な埋め込み

$$\rho : \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \hookrightarrow \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$$

を与える．

この実行列 $\rho(M)$ は複素構造 K と可換である．すなわち，

$$\rho(M)K = K\rho(M)$$

である．

逆に，$T \in \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$ が K と可換ならば，T は複素構造 K に関して複素線形である．すなわち，ある $M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ が存在して

$$T = \rho(M)$$

と書ける．実際，

$$T = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$$

と書くと，

$$TK = KT$$

は

$$R = -Q, \qquad S = P$$

と同値である．したがって

$$T = \begin{pmatrix} P & Q \\ -Q & P \end{pmatrix}.$$

これは複素行列

$$P - \mathrm{i}Q \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$$

の実化である．

ゆえに

$$\mathrm{C}_{\mathrm{GL}(2n,\mathbb{R})}(\{K\}) \simeq \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$$

である．ここで $\mathrm{C}_G(S)$ は群 G における部分集合 S の中心化群を表す．

したがって，

$$T \in \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$$

が複素線形変換に由来することと，

$$TK = KT$$

は同値である．

5　交わりから複素構造が出ること

ここで

$$T \in \mathrm{O}(G) \cap \mathrm{Sp}(\Omega)$$

と仮定する．すなわち

$$T^t GT = G, \qquad T^t \Omega T = \Omega$$

が成り立つとする．

$K = G^{-1}\Omega$ であるから，

$$\begin{aligned} K &= G^{-1}\Omega \\ &= (T^t GT)^{-1}(T^t \Omega T) \\ &= T^{-1}G^{-1}\Omega T \\ &= T^{-1}KT. \end{aligned}$$

したがって

$$TK = KT.$$

つまり，T は複素構造 K と可換である．したがって T は複素構造 K に関して複素線形である．

これは幾何学的には次のことを意味する．実ベクトル空間上で，対称双線形形式 g とシンプレクティック形式 ω を同時に保存する変換を考えると，両者の合成

$$K = g^{-1}\omega$$

として得られる複素構造も自動的に保存される．したがって，そのような変換は実は複素線形でなければならない．

6　中心化群としての記述

前節の議論から，

$$\mathrm{O}(G) \cap \mathrm{Sp}(\Omega) \subset \mathrm{C}_{\mathrm{O}(G)}(\{K\})$$

が従う．

逆に，

$$T \in \mathrm{C}_{\mathrm{O}(G)}(\{K\})$$

とする．すなわち，

$$T^t G T = G, \qquad TK = KT$$

とする．このとき

$$\begin{aligned} T^t \Omega T &= T^t G K T \\ &= T^t G T K \\ &= G K \\ &= \Omega. \end{aligned}$$

したがって

$$T \in \mathrm{Sp}(\Omega).$$

よって

$$\mathrm{O}(G) \cap \mathrm{Sp}(\Omega) = \mathrm{C}_{\mathrm{O}(G)}(\{K\})$$

である．

同様に，

$$T \in \mathrm{C}_{\mathrm{Sp}(\Omega)}(\{K\})$$

とする．すなわち，

$$T^t \Omega T = \Omega, \qquad TK = KT$$

とする．$\Omega = GK$ より

$$G = \Omega K^{-1}$$

である．したがって，

$$\begin{aligned} T^t G T &= T^t \Omega K^{-1} T \\ &= T^t \Omega T K^{-1} \\ &= \Omega K^{-1} \\ &= G. \end{aligned}$$

ゆえに

$$T \in \mathrm{O}(G).$$

よって

$$\mathrm{O}(G) \cap \mathrm{Sp}(\Omega) = \mathrm{C}_{\mathrm{Sp}(\Omega)}(\{K\})$$

も成り立つ．
　以上より，
$$\mathrm{O}(G) \cap \mathrm{Sp}(\Omega) = \mathrm{C}_{\mathrm{O}(G)}(\{K\}) = \mathrm{C}_{\mathrm{Sp}(\Omega)}(\{K\})$$
である．

7　$\mathrm{U}(p,q)$ との同一視

　最後に，この群が $\mathrm{U}(p,q)$ であることを確認する．
　複素行列
$$M = A + \mathrm{i}B, \qquad A, B \in M_n(\mathbb{R})$$
の実化を
$$\rho(M) = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$$
とする．
　このとき，
$$M^\dagger H M = H$$
であることと
$$\rho(M)^t G \rho(M) = G$$
であることは同値である．実際，
$$\begin{aligned} M^\dagger H M &= (A^t - \mathrm{i}B^t) H (A + \mathrm{i}B) \\ &= A^t H A + B^t H B + \mathrm{i}(A^t H B - B^t H A). \end{aligned}$$
一方，
$$\rho(M)^t G \rho(M) = \begin{pmatrix} A^t H A + B^t H B & -A^t H B + B^t H A \\ -B^t H A + A^t H B & B^t H B + A^t H A \end{pmatrix}.$$
したがって，
$$M^\dagger H M = H$$
と
$$\rho(M)^t G \rho(M) = G$$
は同値である．
　よって
$$\rho(\mathrm{U}(p,q)) = \mathrm{C}_{\mathrm{GL}(2n,\mathbb{R})}(\{K\}) \cap \mathrm{O}(G).$$
しかし前節より，
$$\mathrm{C}_{\mathrm{GL}(2n,\mathbb{R})}(\{K\}) \cap \mathrm{O}(G) = \mathrm{O}(G) \cap \mathrm{Sp}(\Omega)$$
である．したがって
$$\rho(\mathrm{U}(p,q)) = \mathrm{O}(G) \cap \mathrm{Sp}(\Omega).$$

以上をまとめると，

$$\boxed{\rho(\mathrm{U}(p,q)) = \mathrm{O}(2p,2q) \cap \mathrm{Sp}(2p+2q,\mathbb{R})}$$

である．ここで右辺は，$\mathbb{R}^{2p+2q}$ 上の形式

$$G = I_2 \otimes H, \qquad \Omega = J \otimes H$$

に関する直交群とシンプレクティック群の交わりとして理解する．

さらに，

$$\boxed{\rho(\mathrm{U}(p,q)) = \mathrm{O}(2p,2q) \cap \mathrm{Sp}(2p+2q,\mathbb{R}) = \mathrm{C}_{\mathrm{O}(2p,2q)}(\{K\}) = \mathrm{C}_{\mathrm{Sp}(2p+2q,\mathbb{R})}(\{K\})}$$

が成り立つ．ただし

$$K = J \otimes I_n, \qquad n = p+q.$$

8　幾何学的な意味

この等式の意味は次のようにまとめられる．

複素エルミート形式

$$h = g + \mathrm{i}\omega$$

は，実部として対称双線形形式 g を，虚部としてシンプレクティック形式 ω を持つ．

したがって，複素エルミート形式を保存する群 $\mathrm{U}(p,q)$ は，実形式の言葉では，

g を保存する

かつ

ω を保存する

変換群である．

ところが，g と ω が両方与えられると，

$$K = g^{-1}\omega$$

によって複素構造が回復される．したがって，g と ω の両方を保存する変換は，必然的に K を保存する．すなわち，それは複素構造 K に関して複素線形な変換である．

このため，

$$\mathrm{O}(2p,2q) \cap \mathrm{Sp}(2p+2q,\mathbb{R})$$

という一見すると純粋に実線形代数的な交わりから，自然に複素構造が現れ，その結果として不定値ユニタリ群

$$\mathrm{U}(p,q)$$

が得られる．

特に $q=0$ の場合には，よく知られた等式

$$\mathrm{U}(n)=\mathrm{O}(2n)\cap\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$$

が回復される．ここでの議論はその不定値版であり，

$$\mathrm{U}(p,q)=\mathrm{O}(2p,2q)\cap\mathrm{Sp}(2p+2q,\mathbb{R})$$

と理解できる．