超可積分系入門（その１）

adhara*

2017 年 3 月 12 日

概要

超可積分系のレビューである Willard Miller Jr, Sarah Post and Pavel Winternitz の"Classical and quantum superintegrability with applications"[*1] のイントロを簡略化したものである。

* Twitter @adhara_mathphys

[*1] J. Phys. A: Math. Theor. 46 (2013) 423001

1　はじめに

物理系の振る舞いを把握するための標準的な方法は、系の数学的モデルを構築してそれを解析すること、そして物理的予測を行って実験結果と比較することである。古典力学や量子力学といったものも大枠としてはこのような方法をとることで劇的に成功し続けてきた。たいていの場合、これらの数学的モデルは常微分方程式（PDE）や偏微分方程式（PDE）として表されることが多い。一般にこれらの方程式を解析的に解くことはできず、その場合は数値近似解しか得られないということはしばしばある。

しかしながら、比較的少数の系については、将来の挙動を予測する明示的な解析式と質量や初期位置などの調整可能なパラメータを使って正確に解く（＝解析的に解く）ことができるため、これらのパラメータの変更に対する系への影響を完全に予測できる。このような系はハミルトン系（エネルギーが保存される系）であれば可積分ハミルトン系と呼ばれる。

さらに、これらの可積分ハミルトニアン系の中には超可積分系（superintegrable system）と呼ばれるグループが存在する。超可積分系は、解析的に解けるだけではなく代数的に解ける、という特徴を持っており、物理的な現象の考察が極めてしやすい系である。そして超可積分系の中でも単純な系のいくつかは初等的な教科書で取り上げられている。超可積分系の有名な例としては、古典力学では非等方調和振動子系（リサージュパターン）とケプラー系（惑星軌道）、量子力学ではクーロン系（元素の周期表の理解にもつながる水素原子のエネルギー準位）、等方調和振動子系がある。これらの系が古典力学や量子力学の創設に深く関わっていることは特筆すべきことである。これら超可積分系は実のところ、半導体からブラックホールまで、現代の幅広い物理学的・数学的理論に現れる。

超可積分系が発見されることは直ちに、それが明示的に解かれて性質が完全にわかることとほぼ同義である。したがって、現実系の第ゼロ近似として超可積分系を考えることがしばしばある。すなわち、超可積分系に対する摂動を考えることでより複雑である現実系の挙動を研究する、ということが頻繁に行われる。例えば、元素の周期表は超可積分系である水素様原子系に対して多体効果を摂動として取り入れた結果の産物である。

超可積分系の主な研究は、

- 発見すること
- 分類すること
- 解くこと
- 構造、特に対称性を表す代数構造を解明すること
- 結果を他の分野に応用すること

から成り立っている。超可積分系の研究は長い歴史があり、Kepler や Newton や Hooke あたりまで遡っても良いと思われる。ケプラー運動における Laplace-Runge-Lenz ベクトルを発見した Hermann や Johann Bernoulli らもある意味の研究、閉軌道を構成する球対称ポテンシャルに関する定理を発見した Bertland も超可積分系の研究への貢献者である。量子力学における超可積分系の研究は Pauli や Fock や Bargmann まで遡って良いと思われる。明確に超可積分系という概念を創設したのは、2 次元（2D）と 3 次元（3 次元）ユークリッド空間における多重変数分離性（Hamilton-Jacobi 方程式の変数分離が幾つかの座標系で可能となること）を探求した Smorodinsky、Winternitz らと考えられているが、この時は「超可積分系（superintegrable system）」という用語は存在しなかった。この用語が提案されたのは 1980 年代で Wojciechowski によるものだとのことである。初期の用語は「偶然縮退系」であり、水素原子のエネルギー縮退に関する Fock と Bargmann の研究に因んでいる。他には「隠れた対称性」や「高次の対称性」や「力学的対称性」といった言葉が用いられていた。1990 年頃の Evans のいくつかの論文により超可積分系の関心は大きく高まった。これらの論文は 3 次元における幾つかの超可積分系を体系的に分類したという点で意義がある。

最近では量子系や高次の系（ハミルトニアンが運動量の三次、四次となるもの）についての超可積分を考えることが現在盛んである。これらの研究については、Daskaloyannis、Kalnins、Kress、Marquette、Miller、Pogosyan、Post、Vinet、Winternitz、Evans、Verrier、Rodriguez、Tempesta、Tremblay、Turbiner といった人の名前が挙がる。量子超可積分系は超可積分系の量子力学バージョンであり、それらの系の中には古典力学アナログを持たないものがあり（古典力学化しようとすると性質が失われる）、面白いと考えられている。また量子超可積分系の中には Painlev é 超越方程式と関連する可能性がある系が発見されている、とのことである。高次の超可積分系は最初は珍しいと考えられていたが、他の超可積分系のファミリーを自在に構築するた

めの方法論が確立しつつある、とのことである。

超可積分系が興味深い理由は次の通りである。

1. 古典力学では、超可積分系は軌道を位相空間の $n-k$ 次元部分空間 $(0<k<n)$ に制限する。$k=n-1$（最大超可積分系）の場合、これはすべての有限軌道が閉じており、運動が周期的であることを意味する。（特に断りのない場合は最大超可積分系を指す。）
2. 少なくとも原理的には軌道は計算することなく計算され得る。
3. Bertrand の定理では、全ての有界軌道が閉じられる球対称ポテンシャルの形状は、クーロン型と Hooke 型（等方調和振動子型）のみである。すなわち、球対称性のポテンシャルで超可積分系はこれら以外にない。他に超可積分系があればそれは球対称ではないが、実際にそのような超可積分系は存在する。
4. 運動の積分がなす代数は非可換である。これらは有限生成代数であルガ、有限次元のリー代数になる場合と無限次元 Kac-Moody 代数になる場合がある。
5. 二次の超可積分系の場合（運動の積分は、運動量については二次の多項式となる)、Hamilton-Jacobi 方程式または Schroödinger 方程式における多重変数分離性に関連する（それぞれ古典力学の場合と量子力学の場合)。
6. 量子力学では、超可積分系はエネルギー準位の高度な縮退につながり、「偶然縮退」とも呼ばれた。この用語は、Fock によって造語され、Moshinsky と共同研究者によって使用されたが、実際はこの縮退が偶然ではないことが示されたのである。
7. すべての既知の例から考えて、すべての最大超可積分系は完全可解だという予想がある。これが真であれば、エネルギー準位は代数的な操作だけで必ず計算することができる。波動関数は多項式（適切に選択された変数）に何らかの係数を掛けたものとなる。
8. 運動の積分がなす非可換代数は、エネルギースペクトルと波動関数に関する情報を与える。量子力学における超可積分系と超対称性との間に興味深い関係が存在する。

超可積分は非可換可積分とも呼ばれている。この観点から、無限次元の積分可能なシステム（ソリトン系、Korteweg-de-Vries 方程式、非線形 Schrödinger 方程式、Kadomtsev-Petviashvili 方程式など）は超可積分系である。