超球の体積／超球面の表面積とラプラシアンに対するグリーン関数

adhara*

2016 年 12 月 18 日

1　超球の体積／超球面の表面積

D 次元空間（$D \geq 2,\ D \in \boldsymbol{N}$）における超球面 S^{D-1} の表面積を求める。すなわち、$\{(x_1, x_2, \cdots, x_D) | x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = r, x_1, x_2, \cdots, x_d \in \boldsymbol{R}\}$ なる超球面の面積を求める。また超球面に囲まれた部分の体積（超球の体積）を求める。

求積にあたり、極座標表示 $(r, \theta_0, \theta_1, \cdots, \theta_{D-2})$ を考える。ここで $r \geq 0, 0 \leq \theta_0 < 2\pi, 0 \leq \theta_i < \pi\ (1 \leq i \leq\ D-2)$ で

* Twitter @adhara_mathphys

あり、

$$x_1 = r\cos\theta_0 \prod_{i=1}^{D-2} (\sin\theta_i) \tag{1}$$

$$x_2 = r\sin\theta_0 \prod_{i=1}^{D-2} (\sin\theta_i) \tag{2}$$

$$x_3 = r\cos\theta_1 \prod_{i=2}^{D-2} (\sin\theta_i) \tag{3}$$

$$\cdots$$

$$x_k = r\cos\theta_{k-2} \prod_{i=k-1}^{D-2} (\sin\theta_i) \tag{4}$$

$$\cdots$$

$$x_{D-1} = r\cos(\theta_{D-3})\sin(\theta_{D-2}) \tag{5}$$

$$x_D = r\cos(\theta_{D-2}) \tag{6}$$

のように座標変換を行う。

　極座標系は直交曲線座標系となっている。すなわち極座標系の基底ベクトルが各点に対して、

$$\boldsymbol{e}_r = \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial r}\right)_{\theta_0,\theta_1,\cdots,\theta_{D-1}} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{e}_{\theta_i} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta_i}\right)_{r,\theta_0,\theta_1,\cdots,\theta_{i-1},\theta_{i+1},\cdots,\theta_{D-2}} \tag{8}$$

のように定義されるがそれらが各点で直交する（$i \neq j$ のとき $\boldsymbol{e}_i^T \boldsymbol{e}_j = 0$）ということである。

座標変換を表すヤコビアンは $D\times D$ の行列であり、

$$J(x_1, x_2, \cdots, x_D; r, \theta_0, \cdots, \theta_{D-2}) = \left(\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_{\theta_0}, \cdots, \boldsymbol{e}_{\theta_{D-2}}\right) \tag{9}$$

となる。

体積要素の変換は

$$dx_1 dx_2 \cdots dx_D = |J| dr d\theta_0 \cdots \theta_{D-2} \tag{10}$$

のようになる（$|J| = \mathrm{det}J$）が、$\boldsymbol{e}_i$ の直交性より、

$$|J| = |\boldsymbol{e}_r||\boldsymbol{e}_{\theta_0}| \cdots |\boldsymbol{e}_{\theta_{D-2}}| \tag{11}$$

となっている。

さらに計算を進めると、

$$|\boldsymbol{e}_r| = 1 \tag{12}$$

$$|\boldsymbol{e}_{\theta_j}| = r \prod_{i=j+1}^{D-2} \sin\theta_i \quad (0 \leq j \leq D-2) \tag{13}$$

より、

$$|J| = r^{D-1} \prod_{i=0}^{D-2} \left(\sin\theta_i\right)^i \tag{14}$$

となる。

これらを用いて半径 r の超球の体積 $V_D(r)$ を求めることが出来て、

$$
\begin{aligned}
V_D(r) &= \int_{|\boldsymbol{x}|\leq r} \prod_{i=1}^{D} (dx_i) \\
&= \int_0^r dr' \int_0^{2\pi} d\theta_0 \prod_{i=1}^{D-2} \left(\int_0^\pi d\theta_i \right) |J| \\
&= \int_0^r r'^{D-1} dr' \int_0^{2\pi} d\theta_0 \prod_{i=1}^{D-2} \left(\int_0^\pi (\sin\theta_i)^i d\theta_i \right) \\
&= \frac{r^D}{D} 2\pi \prod_{i=1}^{D-2} \left(\int_0^\pi (\sin\theta_i)^i d\theta_i \right) \qquad (15)
\end{aligned}
$$

となる。

$\prod$ の部分を計算すると、

$$
\int_0^\pi (\sin\theta)^{2n} d\theta = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\pi \qquad (16)
$$

$$
\int_0^\pi (\sin\theta)^{2n+1} d\theta = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}2 \qquad (17)
$$

$$
\int_0^\pi (\sin\theta')^{2n} d\theta' \int_0^\pi (\sin\theta)^{2n-1} d\theta = \frac{\pi}{n} \qquad (18)
$$

を用いて、

$$
\prod_{i=1}^{D-2} \left(\int_0^\pi (\sin\theta_i)^i d\theta_i \right) = \frac{\pi^{\frac{D-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)} \qquad (19)
$$

となる。（D の偶奇で場合分けすると良い。両者ともに上の表式となる。）ただし、Γ 関数は $\Gamma(x) = \int_0^\infty dt\, t^{-(x-1)} e^{-t}$ で定義される関数であり、$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}, \Gamma(1) = 1$ などの性質があるので整数や半整数を引数とするときの値は帰納的に容易に計算できる。たとえば $n \in \boldsymbol{N}$ のときは $\Gamma(n+1) = n!\ (n \in \boldsymbol{N})$ のように書ける。

以上より、

$$V_D(r) = \frac{r^D}{D} \frac{2\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)} \tag{20}$$

となる。

表面積は超球体積の微分で与えられ、

$$\begin{aligned} S_{D-1}(r) &= V_D'(r) && (21) \\ &= r^{D-1} \frac{2\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)} && (22) \end{aligned}$$

と計算できる。

2　ラプラシアンに対するグリーン関数

ここでは、$D \geq 3$ 次元のポアソン方程式

$$\Delta_{\boldsymbol{r}} G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = -\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \tag{23}$$

を考える。

D 次元ラプラシアンは、

$$\Delta = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \tag{24}$$

で与えられる。

このとき、

$$G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \frac{1}{(D-2)S_{D-1}(1)|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^{D-2}} \tag{25}$$

$$= \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{(D-2)S_{D-1}(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)} \tag{26}$$

はポアソン方程式 23 の特解である。これをラプラシアンに対するグリーン関数と称する。グリーン関数は非斉次微分方程式

$$\Delta f(\boldsymbol{r}) = -\rho(\boldsymbol{r}) \tag{27}$$

の解（電荷系のスカラーポテンシャルを求める問題等）を求めるときに大変便利である。すなわち、ラプラス方程式 $\Delta F(\boldsymbol{r}) = 0$ の一般解とグリーン関数を用いることで、

$$f(\boldsymbol{r}) = F(\boldsymbol{r}) + \int d\boldsymbol{r}' G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}') \tag{28}$$

のように書くことが出来る。ラプラス方程式の一般解自体は球面調和関数が登場するがこれについては別の機会で紹介する。

■グリーン関数がポアソン方程式の特解となることの証明

まず、$\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{r}'$ に対して、

$$
\nabla \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^{D-2}} = -(D-2)\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^{D}}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^{D-2}} &= -(D-2)\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^{D}} \\
&= -(D-2)\left\{\frac{\nabla\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^{D}} + (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\nabla\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^{D}}\right. \\
&= -(D-2)\left\{\frac{D}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^{D}} - D(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\cdot\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^{D+2}}\right. \\
&= 0
\end{aligned}
$$

となっており、23 は成立する。

問題は $\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{r}'$ のときである。この検討には、ガウスの定理を用いる。すなわち、$\boldsymbol{r}'$ を囲む半径 ϵ の超球中 V_ϵ での $\Delta_r G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ の体積積分を考える。

$$
\begin{aligned}
\int_{V_\epsilon} d\boldsymbol{r}\Delta_r G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') &= \int_{V_\epsilon} d\boldsymbol{r}\ \nabla\cdot\nabla\frac{1}{(D-2)S_{D-1}(1)|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^{D-2}} \\
&= \int_{S_\epsilon} d\boldsymbol{S}\cdot\nabla\frac{1}{(D-2)S_{D-1}(1)|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^{D-2}} \\
&= -\int_{S_\epsilon} d\boldsymbol{S}\cdot\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{S_{D-1}(1)|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^{D}} \qquad (31)
\end{aligned}
$$

ここで、ガウスの定理により D 次元空間の超球面 S_ϵ での面積分に置き換えた。さらに計算を進めると、面積要素ベクト

ル $d\boldsymbol{S}$ と $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$ が直交することを用いると、

$$
\begin{aligned}
-\int_{S_\epsilon} d\boldsymbol{S}\cdot\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{S_{D-1}(1)|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^D} &= -\int_{S_\epsilon} dS\ \frac{1}{S_{D-1}(1)|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^{D-1}} \\
&= -\int_{S_\epsilon} dS\ \frac{1}{S_{D-1}(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)} \\
&= -\frac{1}{S_{D-1}(\epsilon)}\int_{S_\epsilon} dS \\
&= -\frac{1}{S_{D-1}(\epsilon)} S_{D-1}(\epsilon) \\
&= -1
\end{aligned}
\tag{32}
$$

となる。

以上より、

$$
\int_{V_\epsilon} d\boldsymbol{r}\Delta_r G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\int_{V_\epsilon}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{33}
$$

となる。$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ も $\Delta G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ も $\boldsymbol{r}'$ を含まない領域における積分は 0 であるから、実は先の議論は積分 33 を $\boldsymbol{r}'$ を含む任意の領域に変えた場合も成立する。

したがって、元のポアソン方程式 23 が成立していると言える。（証明終了）