水素様原子スペクトルに関するバーグマンの議論 2

adhara*

2018 年 5 月 20 日

水素様原子スペクトルの隠れた対称性 $SO(4)$ を用いた解法として、フォックの解法やパウリの解法がある。また変数分離を放物線座標で行う方法も存在する。このノートではパウリの解法における解と放物線座標表示の解の関係性を議論する。結論としてはそれらは一対一対応している。

この着想はバーグマン（V. Bargmann）によるものである。

* Twitter @adhara_mathphys

1　水素様原子ハミルトニアンと放物線座標表示の解

水素様原子のハミルトニアン、

$$H = -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m_e} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m_e} - \frac{\kappa}{r} \tag{1}$$

を考えている。

三次元空間中の曲線直交座標の一種である放物線座標を導入する。デカルト座標表示 (x_1, x_2, x_3) から放物線座標表示 $(\lambda_1, \lambda_2, \phi)$ への移行は、

$$\begin{aligned} x_1 &= (\lambda_1 \lambda_2)^{\frac{1}{2}} \cos\phi \\ x_2 &= (\lambda_1 \lambda_2)^{\frac{1}{2}} \sin\phi \\ x_3 &= \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} \end{aligned} \tag{2}$$

のように行える。このとき逆変換等

$$\begin{aligned} \tan\phi &= \frac{x_2}{x_1} \\ \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} &= r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \lambda_1 &= x_3 + r \\ \lambda_2 &= -x_3 + r \end{aligned} \tag{3}$$

が成立している。

1.1　放物線座標表示の解

　ラゲール陪多項式を二つ用いて、

$$\Psi_{N,N_1,m} \propto e^{im\phi} e^{-\frac{\alpha_N}{2}(\lambda_1+\lambda_2)} (\lambda_1\lambda_2)^{\frac{|m|}{2}} L_{N_1}^{|m|}(\alpha_N\lambda_1) L_{N_2}^{|m|}(\alpha_N\lambda_2) \tag{4}$$

と表すことが出来る。ただし、$N_2 = N - N_1 - |m| - 1$ となっているので、独立な量子数は N, N_1, m である。量子数の許される領域は $N \in \boldsymbol{Z}_+$、$N_1, N_2 \in \boldsymbol{Z}_{\geq 0}$、$m = -(N-1), -(N-2), \cdots, N-2, N-1$ である。そして $\alpha_N = \frac{\kappa m_e}{\hbar^2}\frac{1}{N}$ である。

　対応するエネルギーは

$$E_N = -\frac{m_e}{2\hbar^2}\frac{\kappa^2}{N^2} \tag{5}$$

である。

2　演算子の放物線座標表示

　この章では Laplace-Runge-Lenz（LRL）ベクトルおよび角運動量ベクトルに関わるいくつかの演算子の放物線座標表示を求める。

2.1　LRL ベクトルの極軸成分の放物線座標表示

LRL ベクトルは、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M} &= \frac{1}{2m_e}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L}-\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{p})-\frac{\kappa\boldsymbol{x}}{r}\\ &= \frac{1}{2m_e}\left(\sum_i p_i\boldsymbol{x}p_i-(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{p}+\boldsymbol{x}p^2-(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{p})\boldsymbol{p}\right)-\frac{\kappa\boldsymbol{x}}{r}\end{aligned} \tag{6}$$

で定義されるが、さらに計算を進めると極軸成分は

$$M_3=-\frac{1}{m_e}\left\{\frac{p_0^2-p^2}{2}x_3+2i\hbar p_3+p_3(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})\right\} \tag{7}$$

となる。（ここで $\frac{p_0^2}{2m_e}:=H=E$ と書いている。）運動量演算子をすべて右側に持ってくるように式変形を行うと、

$$\begin{aligned}M_3 &= -\frac{1}{m_e}\left\{x_3\frac{p_0^2-p^2}{2}+\frac{\hbar}{i}p_3+(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{p})p_3\right\}\\ &= -\frac{\hbar^2}{m_e}\left\{\frac{x_3}{2}\left(\frac{p_0^2}{\hbar^2}+\nabla^2\right)-\frac{\partial}{\partial x_3}-(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\nabla})\frac{\partial}{\partial x_3}\right\}\end{aligned} \tag{8}$$

となる。

デカルト座標を放物線座標表示に変更して行くためにいくつか準備する。

デカルト座標の微分演算子を（一部）放物線座標表示で表すと、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_1} &= \frac{2x_1}{\lambda_1+\lambda_2}\left(\frac{\partial}{\partial \lambda_1}+\frac{\partial}{\partial \lambda_2}\right)-\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2}\frac{\partial}{\partial \phi} \\
\frac{\partial}{\partial x_2} &= \frac{2x_1}{\lambda_1+\lambda_2}\left(\frac{\partial}{\partial \lambda_1}+\frac{\partial}{\partial \lambda_2}\right)+\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}\frac{\partial}{\partial \phi} \\
\frac{\partial}{\partial x_3} &= \frac{2}{\lambda_1+\lambda_2}\left(\lambda_1\frac{\partial}{\partial \lambda_1}-\lambda_2\frac{\partial}{\partial \lambda_2}\right)
\end{aligned}
\tag{9}
$$

となる。これを用いると、

$$
\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\nabla} = \frac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\left(\frac{\partial}{\partial \lambda_1}+\frac{\partial}{\partial \lambda_2}\right)+\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\left(\lambda_1\frac{\partial}{\partial \lambda_1}-\lambda_2\frac{\partial}{\partial \lambda_2}\right)
\tag{10}
$$

がわかる。さらに

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \lambda_1}\frac{\partial}{\partial x_3} &= \frac{\partial}{\partial \lambda_1}\left\{\frac{2}{\lambda_1+\lambda_2}\left(\lambda_1\frac{\partial}{\partial \lambda_1}-\lambda_2\frac{\partial}{\partial \lambda_2}\right)\right\} \\
&= \frac{2}{\lambda_1+\lambda_2}\frac{\partial}{\partial \lambda_1}\left(\lambda_1\frac{\partial}{\partial \lambda_1}-\lambda_2\frac{\partial}{\partial \lambda_2}\right) \\
&\quad -\frac{2}{(\lambda_1+\lambda_2)^2}\left(\lambda_1\frac{\partial}{\partial \lambda_1}-\lambda_2\frac{\partial}{\partial \lambda_2}\right) \\
\frac{\partial}{\partial \lambda_2}\frac{\partial}{\partial x_3} &= \frac{2}{\lambda_1+\lambda_2}\frac{\partial}{\partial \lambda_2}\left(\lambda_1\frac{\partial}{\partial \lambda_1}-\lambda_2\frac{\partial}{\partial \lambda_2}\right) \\
&\quad -\frac{2}{(\lambda_1+\lambda_2)^2}\left(\lambda_1\frac{\partial}{\partial \lambda_1}-\lambda_2\frac{\partial}{\partial \lambda_2}\right)
\end{aligned}
\tag{11}
$$

であるから、

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\nabla})\frac{\partial}{\partial x_3} &= \frac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_1}\frac{\partial}{\partial x_3}+\frac{\partial}{\partial\lambda_2}\frac{\partial}{\partial x_3}\right) \\
&\quad+\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\left(\lambda_1\frac{\partial}{\partial\lambda_1}\frac{\partial}{\partial x_3}-\lambda_2\frac{\partial}{\partial\lambda_2}\frac{\partial}{\partial x_3}\right) \\
&= \frac{2\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\frac{\partial}{\partial\lambda_1}\left(\lambda_1\frac{\partial}{\partial\lambda_1}-\lambda_2\frac{\partial}{\partial\lambda_2}\right) \\
&\quad+\frac{2\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\frac{\partial}{\partial\lambda_2}\left(\lambda_1\frac{\partial}{\partial\lambda_1}-\lambda_2\frac{\partial}{\partial\lambda_2}\right) \\
&\quad-\frac{2}{\lambda_1+\lambda_2}\left(\lambda_1\frac{\partial}{\partial\lambda_1}-\lambda_2\frac{\partial}{\partial\lambda_2}\right) \\
&= \frac{2\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\frac{\partial}{\partial\lambda_1}\left(\lambda_1\frac{\partial}{\partial\lambda_1}-\lambda_2\frac{\partial}{\partial\lambda_2}\right) \\
&\quad+\frac{2\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\frac{\partial}{\partial\lambda_2}\left(\lambda_1\frac{\partial}{\partial\lambda_1}-\lambda_2\frac{\partial}{\partial\lambda_2}\right)-\frac{\partial}{\partial x_3}
\end{aligned}
$$

となる。

またラプラシアンの放物線座標表示は

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 = \frac{4}{\lambda_1+\lambda_2}&\left\{\frac{\partial}{\partial\lambda_1}\left(\lambda_1\frac{\partial}{\partial\lambda_1}\right)+\frac{\partial}{\partial\lambda_2}\left(\lambda_2\frac{\partial}{\partial\lambda_2}\right)\right. \\
&\left.+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}\right)\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right\}
\end{aligned}
\tag{12}
$$

となっている。

以上より LRL ベクトル極軸成分は、

$$
\begin{aligned}
&M_3 \\
&= -\frac{\hbar^2}{m_e}\left\{ \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{4}\left[\frac{p_0^2}{\hbar^2} + \frac{4}{\lambda_1 + \lambda_2}\right.\right. \\
&\left.\times \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_1}\lambda_1 \frac{\partial}{\partial \lambda_1} + \frac{\partial}{\partial \lambda_2}\lambda_2 \frac{\partial}{\partial \lambda_2} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right)\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\right)\right] \\
&- \frac{2\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\frac{\partial}{\partial \lambda_1}\left(\lambda_1 \frac{\partial}{\partial \lambda_1} - \lambda_2 \frac{\partial}{\partial \lambda_2}\right) \\
&\left.- \frac{2\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\frac{\partial}{\partial \lambda_2}\left(\lambda_1 \frac{\partial}{\partial \lambda_1} - \lambda_2 \frac{\partial}{\partial \lambda_2}\right)\right\} \\
&= \frac{\hbar^2}{2m_e}\left\{ 2\frac{\partial}{\partial \lambda_1}\lambda_1 \frac{\partial}{\partial \lambda_1} + \frac{1}{2\lambda_1}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - \frac{p_0^2}{2\hbar^2}\lambda_1 \right. \\
&\left. - 2\frac{\partial}{\partial \lambda_2}\lambda_2 \frac{\partial}{\partial \lambda_2} - \frac{1}{2\lambda_2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{p_0^2}{2\hbar^2}\lambda_2 \right\} \\
&= \frac{\hbar^2}{2m_e}(A_1 - A_2)
\end{aligned}
\tag{13}
$$

のようになる。ここで、

$$
\begin{aligned}
A_1 &= 2\frac{\partial}{\partial \lambda_1}\lambda_1 \frac{\partial}{\partial \lambda_1} + \frac{1}{2\lambda_1}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - \frac{p_0^2}{2\hbar^2}\lambda_1 \\
A_2 &= 2\frac{\partial}{\partial \lambda_2}\lambda_2 \frac{\partial}{\partial \lambda_2} + \frac{1}{2\lambda_2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - \frac{p_0^2}{2\hbar^2}\lambda_2
\end{aligned}
\tag{14}
$$

を導入した。

2.2 ハミルトニアンと角運動量の極軸方向成分の放物線座標表示

角運動量演算子の極軸方向成分については極座標表示と同じ形であり、すなわち、

$$L_3 = x_1 p_2 - x_2 p_1 = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \phi} \tag{15}$$

となる。

ハミルトニアンについては、ラプラシアンの放物線座標表示（式 12）を用いると、

$$\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_2} \left(A_1 + A_2 + \frac{2\kappa m_e}{\hbar^2} \right) \tag{16}$$

となることがわかる。

3 放物線座標表示の解を固有状態に持つ演算子

放物線座標表示の解（式 4）はハミルトニアン以外にいくつかの演算子の固有状態となっている。この章ではそれらの演算子を紹介し, 解（式 4）がそれらの固有状態となっていることを示す。

3.1　必要な関係式と目的の演算子の紹介

LRL ベクトルや角運動量ベクトルの保存則

$$\begin{aligned}[\mathcal{H}, L_i] &= 0 \\ [\mathcal{H}, M_i] &= 0\end{aligned} \tag{17}$$

が成立している。したがって、

$$\begin{aligned}\left[\mathcal{H}, \boldsymbol{L}^2\right] &= 0 \\ \left[\mathcal{H}, \boldsymbol{M}^2\right] &= 0\end{aligned} \tag{18}$$

等も成立する。

また LRL ベクトルや角運動量ベクトル各成分の交換関係は、

$$[L_i, L_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} L_k \tag{19}$$

$$[M_i, L_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} M_k \tag{20}$$

$$[M_i, M_j] = -\frac{2}{m_e} i\hbar H \sum_k \epsilon_{ijk} L_k \tag{21}$$

のように計算される。

エネルギーがいずれかの束縛状態の固有値 $E < 0$ に定まった部分ヒルベルト固有空間を考えたとき、その空間におい

ては、

$$[M_i, M_j] = -\frac{2}{m_e} i\hbar E \sum_k \epsilon_{ijk} L_k \tag{22}$$

が成立するので、規格化 LRL ベクトル

$$\tilde{\boldsymbol{M}} = \sqrt{\frac{m_e}{-2E}} \boldsymbol{M} \tag{23}$$

を導入することにより、

$$\left[\tilde{M}_i, L_j\right] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} \tilde{M}_k \tag{24}$$

$$\left[\tilde{M}_i, \tilde{M}_j\right] = i \sum_k \epsilon_{ijk} L_k \tag{25}$$

が成立する。

　ここで、

$$\begin{aligned}
\left[\boldsymbol{L}^2, \tilde{M}_3\right] &= -iL_1\tilde{M}_2 - i\tilde{M}_2L_1 + iL_2\tilde{M}_1 + i\tilde{M}_1L_2 \\
\left[\tilde{\boldsymbol{M}}^2, \tilde{M}_3\right] &= -i\tilde{M}_1L_2 - iL_2\tilde{M}_1 + i\tilde{M}_2L_1 + iL_1\tilde{M}_2 \\
\left[\boldsymbol{L}^2, L_3\right] &= 0 \\
\left[\tilde{\boldsymbol{M}}^2, L_3\right] &= 0
\end{aligned} \tag{26}$$

を用いて、

$$\left[\boldsymbol{L}^2 + \tilde{\boldsymbol{M}}^2, L_3\right] = 0 \tag{27}$$

$$\left[\boldsymbol{L}^2 + \tilde{\boldsymbol{M}}^2, \tilde{M}_3\right] = 0 \tag{28}$$

となることが分かる。さらにとくに

$$\left[L_3, \tilde{M}_3\right] = 0 \tag{29}$$

が成立している。

元々、$L_3, \tilde{M}_3, \boldsymbol{L}^2 + \tilde{\boldsymbol{M}}^2$ はハミルトニアンと可換であることから、固有状態のセットを $L_3, \tilde{M}_3, \boldsymbol{L}^2 + \tilde{\boldsymbol{M}}^2$ が同時対角化するようにとることができる。

$$\boldsymbol{M}^2 = \frac{2}{m_e}(\boldsymbol{L}^2 + \hbar^2)H + \kappa^2$$

であるから、$H = E$ のときには

$$\boldsymbol{L}^2 + \tilde{\boldsymbol{M}}^2 = -\frac{\kappa^2 m_e}{2E} - \hbar^2 \tag{30}$$

3.2 固有値の計算

放物線座標表示の波動関数（式 4）について考える。

$\boldsymbol{L}^2 + \tilde{\boldsymbol{M}}^2$ の固有値は、

$$-\frac{\kappa^2 m_e}{2E_N} - \hbar^2 = \hbar^2(N+1)(N-1) \tag{31}$$

となる。$E_N = -\frac{m_e}{2\hbar^2}\frac{\kappa^2}{N^2}$ を用いている。

L_3 の固有値は、

$$m\hbar \tag{32}$$

となる。

$\tilde{M}_3$ について考える。

その前に放物線座標表示解法の一部を用いる。波動関数の λ_1, λ_2 依存部分をそれぞれ f, g とすると、

$$\begin{aligned} f(\lambda_1) &= e^{-\frac{\alpha_N}{2}\lambda_1}\lambda_1^{\frac{|m|}{2}} L_{N_1}^{|m|}(\alpha_N \lambda_1) \\ g(\lambda_2) &= e^{-\frac{\alpha_N}{2}\lambda_2}\lambda_2^{\frac{|m|}{2}} L_{N_2}^{|m|}(\alpha_N \lambda_2) \end{aligned} \tag{33}$$

となっている。

シュレディンガー方程式の変数分離した微分方程式として、

$$\begin{aligned} \left(2\frac{d}{d\lambda_1}\lambda_1\frac{d}{d\lambda_1} - \frac{m^2}{2\lambda_1} - \frac{p_0^2}{2\hbar^2}\lambda_1 + \frac{2\kappa m_e}{\hbar^2} - 2\nu\right) f(\lambda_1) = 0 \\ \left(2\frac{d}{d\lambda_2}\lambda_2\frac{d}{d\lambda_2} - \frac{m^2}{2\lambda_2} - \frac{p_0^2}{2\hbar^2}\lambda_2 + 2\nu\right) g(\lambda_2) = 0 \end{aligned} \tag{34}$$

が成立している。ただし、

$$N_1 = -\frac{1}{2} - \frac{|m|}{2} + \frac{\frac{\kappa m_e}{\hbar^2} - \nu}{\alpha_N} \tag{35}$$

によって ν が定まる。ただし、

$$\alpha_N = \frac{\kappa m_e}{\hbar^2}\frac{1}{N} \tag{36}$$

である。（このあたりは「放物線座標表示の解法」のノートですでに触れている）

　したがって、

$$\begin{aligned} A_1 \Psi_{N,N_1,m} &= -\left(\frac{2\kappa m_e}{\hbar^2} - 2\nu\right)\Psi_{N,N_1,m} \\ A_2 \Psi_{N,N_1,m} &= -2\nu\Psi_{N,N_1,m} \end{aligned} \tag{37}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{\kappa m_e}{\hbar^2} - \left(N_1 + \frac{|m|+1}{2}\right)\alpha_N \\ &= \left\{N - \left(N_1 + \frac{|m|+1}{2}\right)\right\}\alpha_N \end{aligned} \tag{38}$$

を用いると、

$$\begin{aligned} A_1 \Psi_{N,N_1,m} &= -\left(2N_1 + |m| + 1\right)\alpha_N \Psi_{N,N_1,m} \\ A_2 \Psi_{N,N_1,m} &= -(2N - 2N_1 - |m| - 1)\alpha_N \Psi_{N,N_1,m} \end{aligned} \tag{39}$$

　したがって、

$$\begin{aligned} M_3 \Psi_{N,N_1,m} &= \frac{\hbar^2}{2m_e}(A_1 - A_2) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m_e}2(2N_1 + |m| + 1 - N)\alpha_N \Psi_{N,N_1,m} \end{aligned} \tag{40}$$

となる。

規格化 LRL ベクトル、

$$\tilde{\boldsymbol{M}} = \sqrt{\frac{m_e}{-2E_N}}\boldsymbol{M} = \frac{\hbar N}{\kappa}\boldsymbol{M} \tag{41}$$

を用いると、

$$\begin{aligned}
&\tilde{M}_3\Psi_{N,N_1,m} \\
&= -\frac{\hbar N}{\kappa}\frac{\hbar^2}{2m_e}2(2N_1 + |m| + 1 - N)\frac{\kappa m_e}{\hbar^2}\frac{1}{N}\Psi_{N,N_1,m} \\
&= -\hbar(2N_1 + |m| + 1 - N)\Psi_{N,N_1,m} \\
&= -\hbar(N_1 - N_2)\Psi_{N,N_1,m}
\end{aligned} \tag{42}$$

となり、$\tilde{M}_3$ の固有値がわかる。

4　パウリの解法との比較

4.1　パウリの解法抜粋

パウリの解法では、

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{L} + \tilde{\boldsymbol{M}}) \tag{43}$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{L} - \tilde{\boldsymbol{M}}) \tag{44}$$

としたときに $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ が独立に $su(2)$ 代数に従うことを利用した。すなわち、固有状態の組は $\boldsymbol{A}^2 (= \boldsymbol{B}^2), A_3, B_3$ の同時固

有状態、

$$\{|l,m_a\rangle\otimes|l,m_b\rangle|2l\in \boldsymbol{Z}_{\geq 0}, m_a, m_b = -l, -l+1, \cdots, l-1, l\}$$

にとれる。ただし、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^2|l,m\rangle &= l(l+1)\hbar^2|l,m\rangle\\ A_3|l,m\rangle &= m\hbar|l,m\rangle\\ \boldsymbol{B}^2|l,m\rangle &= l(l+1)\hbar^2|l,m\rangle\\ B_3|l,m\rangle &= m\hbar|l,m\rangle\end{aligned} \tag{45}$$

である。

4.2　放物線座標表示解とパウリの解法の比較

角運動量ベクトルや LRL ベクトルの極軸成分は

$$\begin{aligned}L_3 &= A_3 + B_3\\ \tilde{M}_3 &= A_3 - B_3\end{aligned}$$

のように $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ を用いて表すことが出来る。

パウリの解法の解 $|l,m_a\rangle\otimes|l,m_b\rangle$ に $\boldsymbol{L}^2+\tilde{\boldsymbol{M}}^2, L_3, \tilde{M}_3$ を

作用させると、

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{L}^2+\tilde{\boldsymbol{M}}^2)|l,m_a\rangle\otimes|l,m_b\rangle &= 2(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2)|l,m_a\rangle\otimes|l,m_b\rangle \\
&= 4l(l+1)\hbar^2|l,m_a\rangle\otimes|l,m_b\rangle \\
L_3|l,m_a\rangle\otimes|l,m_b\rangle &= (m_a+m_b)\hbar|l,m_a\rangle\otimes|l,m_b\rangle \\
\tilde{M}_3|l,m_a\rangle\otimes|l,m_b\rangle &= (m_a-m_b)\hbar|l,m_a\rangle\otimes|l,m_b\rangle
\end{aligned}
\tag{46}
$$

となる。

一方で、$\Psi_{N,N_1,m}$ への作用は、

$$
\begin{aligned}
\left(\boldsymbol{L}^2+\tilde{\boldsymbol{M}}^2\right)\Psi_{N,N_1,m} &= \hbar^2(N-1)(N+1)\Psi_{N,N_1,m} \\
L_3\Psi_{N,N_1,m} &= m\hbar\Psi_{N,N_1,m} \\
\tilde{M}_3\Psi_{N,N_1,m} &= -\hbar(2N_1+|m|+1-N)\Psi_{N,N_1,m}
\end{aligned}
\tag{47}
$$

のようになる。

式 46,47 の比較により、（規格化因子を適当に設定して）

$$
|l,m_a\rangle\otimes|l,m_b\rangle = \Psi_{2l+1,l-\frac{|m_a+m_b|+(m_a-m_b)}{2},m_a+m_b} \tag{48}
$$

となっていることが分かる。すなわち、両者は一対一対応している。