Gegenbauer 多項式と帯球関数と再生核

adhara*

2020 年 8 月 2 日

以下では群 $G = SO(D)$ が S^{D-1} に作用する状況を考える。また多項式といった時には特に断りがなければ複素係数多項式を指すものとする。

1 おさらい

1.1 Laplacian と Laplace-Beltrami 演算子

$\boldsymbol{R}^D$ 次元空間における単位超球面は S^{D-1} という多様体である。

S^{D-1} のことを考えるには、極座標表示 $(r, \theta_0, \theta_1, \cdots, \theta_{D-2})$

* Twitter @adhara_mathphys

を導入するのが便利である。ここで

$$r \geq 0, 0 \leq \theta_0 < 2\pi, 0 \leq \theta_i < \pi \ (1 \leq i \leq \ D-2)$$

であり、

$$\begin{align}
x_1 &= r \sin\theta_0 \prod_{i=1}^{D-2} (\sin\theta_i) \tag{1} \\
x_2 &= r \cos\theta_0 \prod_{i=1}^{D-2} (\sin\theta_i) \tag{2} \\
x_3 &= r \cos\theta_1 \prod_{i=2}^{D-2} (\sin\theta_i) \tag{3} \\
&\cdots \notag \\
x_k &= r \cos\theta_{k-2} \prod_{i=k-1}^{D-2} (\sin\theta_i) \tag{4} \\
&\cdots \notag \\
x_{D-1} &= r \cos(\theta_{D-3}) \sin(\theta_{D-2}) \tag{5} \\
x_D &= r \cos(\theta_{D-2}) \tag{6}
\end{align}$$

のように座標変換を行う。

極座標が直交曲線座標であることを利用すると Laplacian

は、

$$\Delta_{\boldsymbol{R}^D} = \sum_{i=1}^{D} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$
$$= \frac{1}{r^{D-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{D-1} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\Delta_{S^{D-1}}}{r^2} \tag{7}$$

のように表示することが出来る。$\Delta_{S^{D-1}}$ は S^{D-1} 上の Laplacian であり、Laplace-Beltrami 演算子と称される。

Laplace-Beltrami 演算子は一つ下の次元の Laplace-Beltrami 演算子を用いて逐次的に求めることが出来る。

$$\Delta_{S^D} = \frac{1}{(\sin\theta_{D-1})^{D-1}} \left(\frac{\partial}{\partial \theta_{D-1}} \left((\sin\theta_{D-1})^{D-1} \frac{\partial}{\partial \theta_{D-1}} \right) \right) + \frac{1}{(\sin\theta_{D-1})^2} \Delta_{S^{D-1}} \tag{8}$$

1.2 特殊直交群 $SO(D)$ の作用について

特殊直交群 $G = SO(D)$ は R^D 上のベクトルに対して狭義回転行列[*1]として左作用する。同様に $SO(D)$ が R^D 上の関数空間 V（詳細についてはあとで定義する）に左作用することを考える。これを表現としては (T, V) と書くことにする。

[*1] 行列式が 1 となる直交行列

すなわち、関数を f とすると $g \in G, x \in R^D$ として

$$T(g)f(x) = f(g^{-1}x)$$

となる。

同様に G が $S^{D-1} \simeq SO(D)/SO(D-1)$ やその上の関数空間 V への左作用することを考えられる。これについても記号の濫用であるが (T, V) と書くことにする。

次のことが言える。

定理 1. *Laplacian* Δ_{R^D} や *Laplace-Beltrami* 演算子 $\Delta_{S^{D-1}}$ は $SO(D)$ の要素と可換である。

1.3 調和関数と球面調和関数

Fourier 級数の理論の拡張として、$S^{D-1} \simeq SO(D)/SO(D-1)$ 上の不変測度

$$d\Omega(x) = \prod_{i=0}^{D-2} (\sin^i \theta_i d\theta_i) \tag{9}$$

を用いた L^2 ノルムによって定まる内積空間 $L^2(S^{D-1}, d\Omega)$ は、直交関数系である球面調和関数の直和として表すことが出来る。すなわち次の定理が成立する。

定理 2. $\mathcal{H}_k$ を k 次の球面調和関数（k 次の斉次多項式となる調和関数を球面に制限したもの）からなる関数部分空間とすれば、

$$L^2(S^{D-1}, d\Omega) = \oplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k \tag{10}$$

が成立する。

その他成立することとしては、

定理 3. $\mathcal{H}_k$ が *Laplace-Beltrami* 演算子の固有空間となっていること、すなわち、$Y \in \mathcal{H}_k$ に対して

$$\Delta_{S^{D-1}} Y = -k(D+k-2)Y \tag{11}$$

が成立する。

や、

定理 4. 線形空間 $\mathcal{H}_k$ の次元は

$$\begin{aligned}\dim(\mathcal{H}_k) &= {}_{D+k-1}C_{D-1} - {}_{D+k-3}C_{D-1} \\ &= \frac{(D+k-3)!(D+2k-2)}{(D-2)!k!}\end{aligned}$$

で与えられる。

などがある。

1.4　固定部分群と帯球関数

ある $u_0 \in S^{D-1}$ を定めると、群 $SO(D)$ の固定部分群

$$\mathrm{Stab}(u_0) = \{g \in SO(D) | gu_0 = u_0\}$$

が定まる。これを L とすると群同型

$$L \simeq SO(D-1)$$

が成立する。以下では u_0 と L をすでに固定したものとして議論を進める。

群 L 群の作用によって不変な関数は L 不変な関数と呼ばれる。例えば、$\boldsymbol{R}^D$ 上 k 次の斉次多項式からなる関数空間を P_k としたときにその部分空間

$$P_k^L = \left\{ p(x) \in P_k | \forall x \in \boldsymbol{R}^D, \forall l \in L : p(lx) = p(x) \right\} \tag{12}$$

は $\boldsymbol{R}^D$ 上 k 次の複素係数斉次多項式のうち L 不変なものからなる関数空間である。

帯球関数（zonal spherical function）とは球面調和関数のうち u_0 の固定部分群 L によって不変なものを指す。すなわち、

$$\mathcal{H}_k^L := \left\{ Y \in \mathcal{H}_k | \forall l \in L, \forall u \in S^{D-1} : Y(lu) = Y(u) \right\} \tag{13}$$

で定義される関数空間に属する関数を k 次の帯球関数と呼ぶ。

ここで次のような定理が成立する。

定理 5. $p(x) \in P_k^L$ ならば、

$$p(x) = \sum_{m=0}^{[k/2]} a_m |x|^{2m} (x \cdot u_0)^{j-2m} \quad (a_m \in \boldsymbol{C}) \tag{14}$$

と書ける。ここで $\cdot$ は内積を表す。

定理 6. k 次の調和関数（D 次元空間 $\mathbb{R}^D$ 上のラプラス方程式を満たす k 次複素係数斉次多項式）からなる $\mathcal{H}P_k$ とすると、$\boldsymbol{C}$ 線形空間の直和分解

$$P_k = \mathcal{H}P_k \oplus |x|^2 P_{k-2} \tag{15}$$

が成立する。

定理 7. $\mathcal{H}P_k$ と $\mathcal{H}_k$ は $\boldsymbol{C}$ 線形同型である。

定理 8. 任意の $k = 0, 1, \cdots$ に対して、$\dim \mathcal{H}_k^L = 1$ となる。とくに $Z \in \mathcal{H}_k^L$ ならば、

$$Z(u) = \sum_{i=0}^{k} c_{ki} (u \cdot u_0)^i \quad (b_{ki} \in \boldsymbol{C}) \tag{16}$$

と書ける。すなわち帯球関数は多項式として表される。

定理 8 より k 次の帯球関数 $Z \in \mathcal{H}_k^L$ は複素係数 k 次多項式 $\varphi(t)$ を用いて

$$Z(u) = \varphi(u \cdot u_0) \quad (u \in S^{D-1}) \tag{17}$$

と書くことができる。

この時

定理 9. 二階常微分方程式

$$(t^2 - 1)\varphi''(t) + (D-1)t\varphi'(t) - k(D+k-2)\varphi(t) = 0 \tag{18}$$

が成立する。

1.5 Gegenbauer 多項式

Gegenbauer 多項式は母関数 $(1 - 2xt + t^2)^{-\alpha}$ の級数展開に依って定義される直交多項式である。すなわち、

$$\frac{1}{(1-2xt+t^2)^\alpha} = \sum_{i=0}^{\infty} C_i^\alpha(x) t^i \tag{19}$$

によって定義される多項式 C_i^α は指数 α で i 次の Gegenbauer 多項式である。とくに $\alpha = \frac{1}{2}$ のときは Legendre 多項式となる。α は空間の次元に関する量である。

指数 α、k 次の Gegenbauer 多項式は φ と同様の二階常微分方程式を満たす。

定理 10. 微分方程式

$$(x^2-1)C_k^{\alpha}{}''(x)+(2\alpha+1)xC_k^{\alpha}{}'(x)-k(2\alpha+k)C_k^{\alpha}(x)=0 \tag{20}$$

が成立する。

1.6 帯球関数と Gegenbauer 多項式の関係

定理 11. 帯球関数 $Z\in\mathcal{H}_k^L$ は、Gegenbauer 多項式 $C_k^{\frac{D-2}{2}}(u\cdot u_0)$ の定数倍である。

2 再生核

2.1 $\mathcal{H}_k$ における再生核

任意に $v\in S^{D-1}$ を取る。非負整数 k を固定し、次のような $\mathcal{H}_k$ 上の線形汎関数

$$\Phi_v\in(\mathcal{H}_k)^*=\mathrm{Hom}(\mathcal{H}_k,\mathbb{C}),\ \Phi_v:Y\mapsto Y(v) \tag{21}$$

を考えることができる。[*2]ここで $\mathcal{H}_k$ は $L^2(S^{D-1})$ から内積が定まっているから、

$$Y(v) = \int_{S^{D-1}} Y(u)\Phi_v^*(u)d\Omega(u) = (Y|\Phi_v) \tag{22}$$

を満たす $\Phi_v \in \mathcal{H}_k$ が存在する[*3]と考えても良い。この $\Phi_v(u)$ を $\Phi(u,v)$ と書くことにする。これを $\mathcal{H}_k$ における再生核という。

定理 12. 任意の $g \in SO(D), u, v \in S^{D-1}$ に対して

$$\Phi(u,v) = \Phi(gu, gv)$$

が成立する。

証明. 任意に $Y \in \mathcal{H}_k$ をとる。任意の $g \in SO(D)$ に対して

[*2] $\mathcal{H}_k$ は有限次元である。

[*3] 記号の濫用をした。以下では Φ_v は $\mathcal{H}_k$ の元だと思う。

$T(g)Y \in \mathcal{H}_k$ が成立するので[*4]、任意の $v \in S^{D-1}$ に対して

$$
\begin{aligned}
T(g)Y(v) &= \int_{S^{D-1}} T(g)Y(u)\Phi^*(u,v)d\Omega(u) \\
&= \int_{S^{D-1}} Y(g^{-1}u)\Phi^*(u,v)d\Omega(u) \\
&= \int_{S^{D-1}} Y(u)\Phi^*(gu,v)d\Omega(g^{-1}u) \\
&= \int_{S^{D-1}} Y(u)\Phi^*(gu,v)d\Omega(u)
\end{aligned}
\tag{23}
$$

となる。最後の行では不変測度の性質を用いている。一方で、

$$
\begin{aligned}
T(g)Y(v) &= Y(g^{-1}v) \\
&= \int_{S^{D-1}} Y(u)\Phi^*(u,g^{-1}v)d\Omega(u)
\end{aligned}
$$

であるが、ここで Y は任意であったから、任意の $u \in S^{D-1}$ に対して

$$
\Phi(gu,v) = \Phi(u,g^{-1}v) \tag{24}
$$

となる。 $\square$

系 13. 次が成立する。

$$
\Phi(\cdot,u_0) \in \mathcal{H}_k^L
$$

[*4] $T(g)$ は Laplacian や Laplace-Beltramian と可換。

証明. 先の定理 12 により、任意の $g \in L, u \in S^{D-1}$ に対して

$$\Phi(u, u_0) = \Phi(gu, gu_0) = \Phi(gu, u_0) \tag{25}$$

が成立する。すなわち、$\Phi(\cdot, u_0)$ は L 不変。 □

このようにして帯球関数と再生核は結び付けられた。すなわち、

$$\Phi(u, u_0) = CC_k^{\frac{D-2}{2}}(u \cdot u_0)$$

なる定数 C が存在する。以下、この定数を求める。まず、ヒルベルト空間でもある $\mathcal{H}_k$ 上の正規直交基底 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{\dim \mathcal{H}_k}$ をとってくると、

$$\begin{aligned}
\Phi(u, v) &= \Phi_v(u) \\
&= \sum_{j=1}^{\dim \mathcal{H}_k} (\Phi_v | Y_j) Y_j(u) \\
&= \sum_{j=1}^{\dim \mathcal{H}_k} (Y_j | \Phi_v)^* Y_j(u) \\
&= \sum_{j=1}^{\dim \mathcal{H}_k} Y_j^*(v) Y_j(u) \qquad (26)
\end{aligned}$$

となるが、特に

$$\Phi(u, u) \geq 0 \tag{27}$$

である。これを球面上で積分すると、

$$\int_{S^{D-1}} \Phi(u,u)d\Omega(u) = \sum_{j=1}^{\mathrm{dim}\mathcal{H}_k} (Y_j|Y_j) = \mathrm{dim}(\mathcal{H}_k) \quad (28)$$

となる。定理 12 より、

$$\Phi(u,u) = \Phi(u_0,u_0) = CC_k^{\frac{D-2}{2}}(1)$$

であるから、

$$\mathrm{dim}\mathcal{H}_k = CC_k^{\frac{D-2}{2}}(1)S(S^{D-1})$$
$$C = \frac{\mathrm{dim}(\mathcal{H}_k)}{C_k^{\frac{D-2}{2}}(1)S(S^{D-1})}$$

となる。ここで超球面の表面積

$$S(S^{D-1}) = \int_{S^{D-1}} d\Omega(u) = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)}$$

を導入した。また、

$$C_k^{\alpha}(1) = {}_{2\alpha-1+k}C_k$$

が成立するので[*5]、

$$C_k^{\frac{D-2}{2}}(1) = {}_{D-3+k}C_k$$

となる。

[*5] 付録参照

命題 14. 次が成立する。

$$\Phi(u,v) = \frac{\dim(\mathcal{H}_k)}{C_k^{\frac{D-2}{2}}(1)S(S^{D-1})} C_k^{\frac{D-2}{2}}(u\cdot v)$$

証明. 群作用が推移的であることから $gu_0 = v$ なる $g \in G$ が存在する。これを用いると、

$$\begin{aligned}\Phi(u,v) &= \Phi(g^{-1}u, u_0)\\ &= CC_k^{\frac{D-2}{2}}(g^{-1}u\cdot u_0)\\ &= CC_k^{\frac{D-2}{2}}(u\cdot gu_0)\\ &= CC_k^{\frac{D-2}{2}}(u\cdot v)\\ &= \frac{\dim(\mathcal{H}_k)}{C_k^{\frac{D-2}{2}}(1)S(S^{D-1})} C_k^{\frac{D-2}{2}}(u\cdot v) \qquad (29)\end{aligned}$$

となる。 □

2.2 $L^2(S^{D-1})$ における再生核

前節では k を固定していたが、その制限を取り払って、$L^2(S^{D-1})$ における再生核を導入したい。

まず、任意に $v \in S^{D-1}$ を取った時に、球面調和関数 $Y \in \mathcal{H}_k$ と $\mathcal{H}_l$ の再生核 $\Phi_v^{(l)} = \Phi^{(l)}(\cdot, v)$ を考える。ここで $k \neq l$ でも良い。また、再生核同士を区別するために index として (l) を

つけた。この時に、$k \neq l$ の時に $\mathcal{H}_k \perp \mathcal{H}_l$ であるから

$$\delta_{lk} Y(v) = \int_{S^{D-1}} Y(u) \Phi^{(l)*}(u, v) d\Omega(u) \tag{30}$$

が成立する。

ここで Gegenbauer 多項式の母関数による定義 19 より、$u, v \in S^{D-1}$ に対して

$$\frac{1}{|u-v|^{2\alpha}} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{\alpha}(u \cdot v) \tag{31}$$

となるが、特に $\alpha = \frac{D-2}{2}$ とすると、

$$\frac{1}{|u-v|^{D-2}} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{\frac{D-2}{2}}(u \cdot v) \tag{32}$$

となる。一方で、

$$\Phi^{(k)}(u, v) = \frac{\dim(\mathcal{H}_k)}{C_k^{\frac{D-2}{2}}(1) S(S^{D-1})} C_k^{\frac{D-2}{2}}(u \cdot v)$$

だから、

$$\frac{1}{|u-v|^{D-2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{\frac{D-2}{2}}(1) S(S^{D-1})}{\dim(\mathcal{H}_k)} \Phi^{(k)}(u, v) \tag{33}$$

となる。

以上より、$Y \in \mathcal{H}_l$ としたとき、

$$
\begin{aligned}
&\int_{S^{D-1}} Y(u)\frac{1}{|u-v|^{D-2}}d\Omega(u) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k^{\frac{D-2}{2}}(1)S(S^{D-1})}{\dim(\mathcal{H}_k)}\int_{S^{D-1}} Y(u)\Phi^{(k)}(u,v)d\Omega(u) \\
&= \frac{C_l^{\frac{D-2}{2}}(1)S(S^{D-1})}{\dim(\mathcal{H}_l)}Y(v) \\
&= \frac{D-2}{D+2l-2}S(S^{D-1})Y(v)
\end{aligned}
$$

となる。[*6]

さらに $F \in L^2(S^{D-1}, d\Omega)$ とすると定理 2 により、ある $Y_k \in \mathcal{H}_k, c_k \in \mathbb{C} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$ を取ってきて

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} c_k Y_k$$

と一通りに書ける。この表示を用いると、

$$
\begin{aligned}
&\int_{S^{D-1}} F(u)\frac{1}{|u-v|^{D-2}}d\Omega(u) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{D-2}{D+2l-2}S(S^{D-1})c_l Y_l(v)
\end{aligned}
$$

となる。

---

*6 $S(S^{D-1}) = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)}$

これらの式で出てきた $|u-v|^{D-2}$ は $L^2(S^{D-1})$ における再生核と呼ばれる。といっても関数形が保たれるのは元の関数 F[*7]が既約な部分空間 $\mathcal{H}_k$ のいずれかに属する時である。

2.3 $L^2(S^{D-1})$ における再生核と $\mathbb{R}^D$ における Laplacian の Green 関数の関係

まず、ポアソン方程式

$$\Delta_{\mathbb{R}^D} G(x) = -\delta(x) \tag{34}$$

を考える。グリーン関数はポアソン方程式の特解[*8]で、

$$G(x) = \frac{1}{(D-2)S(S^{D-1})|x|^{D-2}} \tag{35}$$

である。したがって、$L^2(S^{D-1})$ における再生核の定数倍である。先に出てきた

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} c_k Y_k$$

*7 $F \neq 0$ とする

*8 ニュートン核（Newtonian Kernel）とも呼ばれるものと同じである。

については

$$\int_{S^{D-1}} F(u)G(u-v)d\Omega(u)$$
$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{c_l Y_l(v)}{D+2l-2}$$

が成立する。

付録

Gegenbauer 多項式には次の漸化式が成立している。

$$C_0^{(\alpha)}(x) = 1 \tag{36}$$
$$C_1^{(\alpha)}(x) = 2\alpha x \tag{37}$$
$$C_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{n}\left[2x(n+\alpha-1)C_{n-1}^{(\alpha)}(x) - (n+2\alpha-2)C_{n-2}^{(\alpha)}(x)\right] \tag{38}$$

特に

$$C_n^{(\alpha)}(1) = \frac{1}{n}\left[2(n+\alpha-1)C_{n-1}^{(\alpha)}(1) - (n+2\alpha-2)C_{n-2}^{(\alpha)}(1)\right] \tag{39}$$

となる。

すなわち $i = 0, 1$ で

$$C_i^{\alpha}(1) = {}_{2\alpha-1+i}C_i$$

は成立している。また $i = n-1, n-2$ で上の式が成立するとすれば、

$$\begin{aligned}
C_n^{(\alpha)}(1) &= \frac{1}{n}[2(n+\alpha-1)_{2\alpha-1+n-1}C_{n-1} \\
&- (n+2\alpha-2)_{2\alpha-1+n-2}C_{n-2}] \\
&= \frac{(2\alpha-1+n-2)!}{n!(2\alpha-1)!}[2(n+\alpha-1)(2\alpha-1+n-1) \\
&- (n+2\alpha-2)(n-1)] \\
&= \frac{(2\alpha-1+n)!}{n!(2\alpha-1)!} \\
&= {}_{2\alpha-1+n}C_n
\end{aligned} \tag{40}$$

が成立する。数学的帰納法より、非負整数 i で

$$C_i^{\alpha}(1) = {}_{2\alpha-1+i}C_i$$

となる。