SO(4) 群と so(4) 代数の表現論（その３）

～ Wigner 行列を用いた四次元球面調和関数の表示 ～

adhara

2018 年 2 月 8 日

　このノートでは $SU(2)$ 群の有限次元既約ユニタリ表現の行列表示である「Wigner の D 行列」を用いて、四次元球面調和関数を表示する。これの恩恵は座標の関数として具体的に書き下せることにある。（Gengenbauer 多項式等を用いて書くことも可能である。）

1 コンパクト位相群における Schur の直交性

位相群の定義等必要知識については別のノートに用意する予定である。（位相の概念、位相群の概念、連続表現、不変測度、等）局所コンパクト位相群（コンパクト位相群を含んでいる）で定義される Haar 測度について多少コメントしておく。Haar 測度は局所コンパクト位相群上の積分を考える上で必要となる測度である。Haar 測度はいくつかの性質を満たすがこのノートにおいて特に重要となるのは不変性である。dg が左 Haar 測度であるとは群の左作用で不変であること（$\forall g \in G : \int_G f(g_0 g)dg = \int_G f(g)dg$）である。同様に右不変の Haar 測度も存在する。両者とも正定数倍を除いて一致する。両 Haar 測度が一致するとき G は unimodular であるという。G が unimodular であるとき逆元を取る操作についても不変であることが示されている（$\int_G f(g)dg = \int_G f(g^{-1})dg$）。$G$ がコンパクトのとき unimodular であることが示されている。以下で出てくる Haar 測度は $\int_G dg = 1$ を満たすものとする（正規化されている）。

コンパクト位相群に関する強力な定理をまず紹介する。

定理 1. コンパクト位相群 G の表現 (π, V) が連続な有限次元

表現であれば（連続表現とは $\pi : G \to GL(V)$ が連続写像となっている表現)、この表現はユニタリ表現である。

Proof. ユニタリ条件が仮定されていない任意の内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ からユニタリ条件を満たす内積を構成出来ることを示す。π が連続表現であることから任意の $v, w \in V$ に対して $g \mapsto \langle\pi(g)v, \pi(g)w\rangle_1$ は連続関数であり、可積分である。このとき二次形式

$$\langle v, w\rangle = \int_G dg \langle\pi(g)v, \pi(g)w\rangle_1$$

を導入すると（dg は Haar 測度）これは内積の要件（双線形性、エルミート性、非退化正定値性）を満たす。さらに dg の不変性を用いるとユニタリ性、

$$\forall g \in G : \langle v, w\rangle = \langle\pi(g)v, \pi(g)w\rangle$$

をもつことが示せる。したがって $\langle\cdot,\cdot\rangle$ はユニタリ条件を満たす内積である。 □

別のノートで次の事実を示していた。

事実 2. 群 G の有限次元ユニタリ表現は完全可約である。

これを用いると次の補題が成立することがわかる。

補題 3. コンパクト位相群 G の表現 (π, V) が連続な有限次元表現であれば完全可約である。

さらに任意の群の任意の既約表現についてはSchurの補題が成立する。

補題 4. (π_1, V_1) と (π_2, V_2) をそれぞれ群 G の既約表現とする。任意の G 準同型 $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$ は同型となるか 0 写像（$\mathrm{Im}A = \{0\}$ となる写像）である。

また有限次元既約表現についてはSchurの補題の系が成立する。

系 5. 群 G の有限次元既約表現 (π, V)（V を $\boldsymbol{C}$ 上のベクトル空間）に対して、$\mathrm{End}_G(V) \simeq \boldsymbol{C}$ である。（任意の元 $\mathrm{End}_G(V)$ が $\lambda \in \boldsymbol{C}$ を用いて λI_V と書ける。ただし I_V は $V \to V$ の恒等写像）

これらの定理等を用いると次のコンパクト位相群の有限次元既約表現に対するSchurの直交性定理を示すことができる。

定理 6. 群 G をコンパクト位相群とする。G には正規化された Haar 測度 dg が備わっているものとする。このとき有限次元ユニタリ表現 (π, V) に対して（V は $\boldsymbol{C}$ 上ベクトル空間とする）、

$$\forall \phi_i, \psi_i \in V (i = 1, 2) :$$
$$\int_G dg \ \langle \pi(g)\phi_1, \psi_1 \rangle \langle \psi_2, \pi(g)\phi_2 \rangle = \frac{1}{\mathrm{dim}V} \langle \phi_1, \phi_2 \rangle \langle \psi_2, \psi_1 \rangle$$

ただし内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ はユニタリ条件を満たすものとする。（定理 1 で示した手法により導入可能である。）

Proof. 任意の $\psi_1,\psi_2\in V$ に対して $Q(\psi_1,\psi_2)\in\mathrm{End}(V)$ を導入する。ただし任意の $\phi\in V$ に

$$Q(\psi_1,\psi_2)\phi=\int_G dg\ \langle\phi,\pi(g)\psi_1\rangle\pi(g)\psi_2$$

のように（線形）作用するものとする。このとき任意の $h\in G$ に対して、

$$\begin{aligned}
&\pi(h)Q(\psi_1,\psi_2)\phi\\
&=\int_G dg\ \langle\phi,\pi(g)\psi_1\rangle\pi(hg)\psi_2\\
&=\int_G dg\ \langle\phi,\pi(h^{-1}g)\psi_1\rangle\pi(g)\psi_2\\
&=\int_G dg\ \langle\pi(h)\phi,\pi(g)\psi_1\rangle\pi(g)\psi_2\\
&=Q(\psi_1,\psi_2)\pi(h)\phi
\end{aligned}$$

が成立する（第二辺から第三辺は dg の不変性、第三辺から第四辺は $\langle\cdot,\cdot\rangle$ のユニタリ性を用いた。）。したがって、$Q(\psi_1,\psi_2)\in\mathrm{End}_G(V)$ である。有限次元表現であることから Schur の補題の系を用いることができる。すなわち、$Q(\psi_1,\psi_2)=\lambda(\psi_1,\psi_2)I_V$（$I_V$ は V 上恒等写像）を満たす $\lambda(\psi_1,\psi_2)$ が存

在する。ここで $\phi_1(\neq 0), \phi_2 \in V$ とすると、

$$\begin{aligned}\langle Q(\psi_1,\psi_2)\phi_1,\phi_2\rangle &= \langle Q(\psi_1,\psi_2)\phi_1,\phi_1\rangle \frac{\langle\phi_1,\phi_2\rangle}{\|\phi_1\|^2} \\ &= \lambda(\psi_1,\psi_2)\langle\phi_1,\phi_2\rangle\end{aligned}$$

となる。第一式と第三式の等号は $\phi_1 = 0$ の場合も成立する。一方、

$$\begin{aligned}\langle Q(\psi_1,\psi_2)\phi_1,\phi_2\rangle &= \int_G dg\ \langle\phi_1,\pi(g)\psi_1\rangle\langle\pi(g)\psi_2,\phi_2\rangle \\ &= \int_G dg\ \langle\psi_2,\pi(g^{-1})\phi_2\rangle\langle\pi(g^{-1})\phi_2,\psi_2\rangle \\ &= \int_G dg\ \langle\psi_2,\pi(g)\phi_2\rangle\langle\pi(g)\phi_2,\psi_2\rangle \\ &= \langle Q(\phi_2,\phi_1)\psi_2,\phi_1\rangle\end{aligned}$$

であるから、

$$\lambda(\psi_1,\psi_2)\langle\phi_1,\phi_2\rangle = \lambda(\phi_2,\phi_1)\langle\psi_2,\psi_1\rangle$$

が従う。上式において $\psi_1,\psi_2,\phi_1,\phi_2 \in V$ は任意（0 があってもよい！）であったから、定数 $c \in \boldsymbol{C}$ が存在し、

$$\forall\psi_1,\psi_2 \in V : \lambda(\psi_1,\psi_2) = c\langle\psi_2,\psi_1\rangle \tag{1}$$

となることが分かる。

以下、c を定める。測度が正規化されていることや内積のユニ

タリ条件を用いると、

$$\begin{aligned}\langle\phi,\phi\rangle &= \int_G dg\ \langle\phi,\phi\rangle \\ &= \int_G dg\ \langle\pi(g)\phi,\pi(g)\phi\rangle\end{aligned}$$

となる。ここで V の完全正規直交系 $\{e_1, e_2, \cdots e_{\mathrm{dim}V}\}$ を用いると、

$$\begin{aligned}\int_G dg\ \langle\pi(g)\phi,\pi(g)\phi\rangle &= \sum_{i=1}^{\mathrm{dim}V}\int dg\ \langle\pi(g)\phi,e_i\rangle\langle e_i,\pi(g)\phi\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{\mathrm{dim}V}\langle Q(\phi,\phi)e_i,e_i\rangle \\ &= c\langle\phi,\phi\rangle\sum_{i=1}^{\mathrm{dim}V}\langle e_i,e_i\rangle \\ &= c\langle\phi,\phi\rangle\mathrm{dim}V\end{aligned}$$

$\phi\neq 0$ とすれば $\langle\phi,\phi\rangle\neq 0$ だから

$$c = (\mathrm{dim}V)^{-1}$$

がわかる。

以上より、

$$\begin{aligned}\int_G dg\ \langle\phi_1,\pi(g)\psi_1\rangle\langle\pi(g)\psi_2,\phi_2\rangle &= \langle Q(\psi_1,\psi_2)\phi_1,\phi_2\rangle \\ &= (\mathrm{dim}V)^{-1}\langle\phi_1,\phi_2\rangle\langle\psi_2,\psi_1\rangle\end{aligned}$$

となる。 □

2　G がリー群 $SU(2)$ のとき

2.1　実多様体として S^3 であること

$SU(2)$ 群は

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \quad (a, b \in \boldsymbol{C}) \tag{2}$$

という形の行列のうち

$$|a|^2 + |b|^2 = 1 \tag{3}$$

となるものからなる線形代数群であることがわかる。

実多様体としては 3 次元である。とくに、

$$\mathrm{Re}(a)^2 + \mathrm{Re}(b)^2 + \mathrm{Im}(a)^2 + \mathrm{Im}(b)^2 = 1 \tag{4}$$

となることから、四次元空間中の単位超球面

$$S^3 = \{(x, y, z, w) \in \boldsymbol{R}^4 | x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\}$$

と同相であることがわかる。とくにこの多様体はコンパクトである。

2.2　Haar 測度

多様体 S^3 上の点を連続変数でパラメトライズできれば問題ない。例えば極座標表示

$$
\begin{aligned}
x_1 &= r\cos\theta \\
x_2 &= r\sin\theta\cos\psi \\
x_3 &= r\sin\theta\sin\psi\cos\phi \\
x_4 &= r\sin\theta\sin\psi\sin\phi
\end{aligned}
$$

を用いると（ただし $0 \leq \theta <, \pi, 0 \leq \psi < \pi, 0 \leq \phi < 2\pi, r > 0$）、超球面 S^3 の表面積は

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\psi \sin^2\theta \sin\psi = 2\pi^2 \tag{5}$$

となり、正規化された測度は

$$d\mu(\theta,\psi,\phi) = \frac{1}{2\pi^2}\sin^2\theta\sin\psi d\theta d\psi d\phi$$

である。

2.3　Wigner の D 行列

$SU(2)$ の有限次元既約表現 $(T_l, \mathcal{F}_l)$ を考える。ここで l は非負の整数あるいは半整数であり、$\mathcal{F}_l$ は正規直交基底が

$$\{\psi_{-l}, \psi_{-l+1}, \cdots, \psi_{l-1}\psi_l\}$$
$$\psi_k(x) = \frac{x^{l-k}}{\sqrt{(l-k)!(l+k)!}}$$

で与えられる $2l+1$ 次元の内積空間（複素係数多項式空間）である。内積は上記の基底が正規直交基底となるように与えられている。

上記の表現の上記の基底による行列表示は Wigner の D 行列と呼ばれる。Wigner の D 行列は

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \quad (a, b \in \boldsymbol{C}, |a|^2 + |b|^2 = 1) \tag{6}$$

として、

$$\begin{aligned} t^l_{mn}(g) &= (T_l(g)\psi_n, \psi_m) \\ &= \frac{((ax-b^*)^{l-n}(bx+a^*)^{l+n}, x^{l-m})}{\sqrt{(l-m)!(l+m)!(l-n)!(l+n)!}} \end{aligned} \tag{7}$$

で与えられる。

3　四次元超球面調和関数と $SO(4)$ の表現

Wigner の D 行列が実は四次元超球面調和関数となっていることを示す。

Wigner の D 行列は S^3 上の関数と見なせるが、$r > 0$ として rg を引数とすることで $\boldsymbol{R}^4$ 上の関数に拡張することが出来る。

$$
\begin{aligned}
t^l_{mn}(rg) &= (T_l(rg)\psi_n, \psi_m) \\
&= \frac{r^{2l}((ax-b^*)^{l-n}(bx+a^*)^{l+n}, x^{l-m})}{\sqrt{(l-m)!(l+m)!(l-n)!(l+n)!}}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

ここでカーテシアン座標 $x_1 = r\mathrm{Re}(a), x_2 = r\mathrm{Im}(a), x_3 = \mathrm{Re}(b), x_4 = \mathrm{Im}(b)$ を導入すると、

$$
\begin{aligned}
&t^l_{mn}(x_1, x_2, x_3, x_4) \\
&= (T_l(x_1, x_2, x_3, x_4)\psi_n, \psi_m) \\
&= \frac{(((x_1+ix_2)x-(x_3-ix_4))^{l-n}((x_3+ix_4)x+(x_1-ix_2))^{l+n}, x^{l-m})}{\sqrt{(l-m)!(l+m)!(l-n)!(l+n)!}}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}t^l_{mn}(x_1,x_2,x_3,x_4)$$
$$= \frac{(l-n)x(((x_1+ix_2)x-(x_3-ix_4))^{l-n-1}((x_3+ix_4)x+(x_1-ix_2))^{l+n},x^{l-m})}{\sqrt{(l-m)!(l+m)!(l-n)!(l+n)!}}$$
$$+ \frac{(l+n)(((x_1+ix_2)x-(x_3-ix_4))^{l-n}((x_3+ix_4)x+(x_1-ix_2))^{l+n-1},x^{l-m})}{\sqrt{(l-m)!(l+m)!(l-n)!(l+n)!}} \tag{10}$$

を用いると

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}t^l_{mn}(x_1,x_2,x_3,x_4)$$
$$= \frac{(l-n)(l-n-1)x^2(((x_1+ix_2)x-(x_3-ix_4))^{l-n-2}((x_3+ix_4)x+(x_1-ix_2))^{l+n},x^{l-m})}{\sqrt{(l-m)!(l+m)!(l-n)!(l+n)!}}$$
$$+ \frac{2(l-n)(l+n)x(((x_1+ix_2)x-(x_3-ix_4))^{l-n-2}((x_3+ix_4)x+(x_1-ix_2))^{l+n},x^{l-m})}{\sqrt{(l-m)!(l+m)!(l-n)!(l+n)!}}$$
$$+ \frac{(l+n)(l+n-1)(((x_1+ix_2)x-(x_3-ix_4))^{l-n}((x_3+ix_4)x+(x_1-ix_2))^{l+n-1},x^{l-m})}{\sqrt{(l-m)!(l+m)!(l-n)!(l+n)!}} \tag{11}$$

となる。同様に

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}t^l_{mn}(x_1,x_2,x_3,x_4) =$$
$$- \frac{(l-n)(l-n-1)x^2(((x_1+ix_2)x-(x_3-ix_4))^{l-n-2}((x_3+ix_4)x+(x_1-ix_2))^{l+n},x^{l-m})}{\sqrt{(l-m)!(l+m)!(l-n)!(l+n)!}}$$
$$+ \frac{2(l-n)(l+n)x(((x_1+ix_2)x-(x_3-ix_4))^{l-n-2}((x_3+ix_4)x+(x_1-ix_2))^{l+n},x^{l-m})}{\sqrt{(l-m)!(l+m)!(l-n)!(l+n)!}}$$
$$- \frac{(l+n)(l+n-1)(((x_1+ix_2)x-(x_3-ix_4))^{l-n}((x_3+ix_4)x+(x_1-ix_2))^{l+n-1},x^{l-m})}{\sqrt{(l-m)!(l+m)!(l-n)!(l+n)!}} \tag{12}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} t^l_{mn}(x_1, x_2, x_3, x_4) \\
&= \frac{(l-n)(l-n-1)x^2(((x_1+ix_2)x-(x_3-ix_4))^{l-n-2}((x_3+ix_4)x+(x_1-ix_2))^{l+n}, x^{l-m})}{\sqrt{(l-m)!(l+m)!(l-n)!(l+n)!}} \\
&- \frac{2(l-n)(l+n)x(((x_1+ix_2)x-(x_3-ix_4))^{l-n-2}((x_3+ix_4)x+(x_1-ix_2))^{l+n}, x^{l-m})}{\sqrt{(l-m)!(l+m)!(l-n)!(l+n)!}} \\
&+ \frac{(l+n)(l+n-1)(((x_1+ix_2)x-(x_3-ix_4))^{l-n}((x_3+ix_4)x+(x_1-ix_2))^{l+n-1}, x^{l-m})}{\sqrt{(l-m)!(l+m)!(l-n)!(l+n)!}}
\end{aligned}
\tag{13}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial x_4^2} t^l_{mn}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \\
&- \frac{(l-n)(l-n-1)x^2(((x_1+ix_2)x-(x_3-ix_4))^{l-n-2}((x_3+ix_4)x+(x_1-ix_2))^{l+n}, x^{l-m})}{\sqrt{(l-m)!(l+m)!(l-n)!(l+n)!}} \\
&- \frac{2(l-n)(l+n)x(((x_1+ix_2)x-(x_3-ix_4))^{l-n-2}((x_3+ix_4)x+(x_1-ix_2))^{l+n}, x^{l-m})}{\sqrt{(l-m)!(l+m)!(l-n)!(l+n)!}} \\
&- \frac{(l+n)(l+n-1)(((x_1+ix_2)x-(x_3-ix_4))^{l-n}((x_3+ix_4)x+(x_1-ix_2))^{l+n-1}, x^{l-m})}{\sqrt{(l-m)!(l+m)!(l-n)!(l+n)!}}
\end{aligned}
\tag{14}
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
&\Delta_{\boldsymbol{R}^4} t^l_{mn}(x_1, x_2, x_3, x_4) \\
&= \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} t^l_{mn}(x_1, x_2, x_3, x_4) \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{15}
$$

となる。すなわち $t^l_{mn}(x_1,x_2,x_3,x_4)$ は $2l$ 次の四次元調和関数である。

調和関数を $r=1$ に制限すると $2l$ 次の四次元球面調和関数となることがわかる。四次元球面調和関数に付いては極座標を用いて $t^l(\theta,\psi,\phi)$ と書くことにする。

コンパクト位相群の有限次元既約表現について成立する Schur の直交性より、

$$\begin{aligned}&\forall\psi_i,\psi_j,\psi_m,\psi_n\in\mathcal{F}_l:\\&\int_G dg\ \langle T_l(g)\psi_i,\psi_j\rangle\langle\psi_m,T_l(g)\psi_n\rangle=\frac{1}{\mathrm{dim}\mathcal{F}_l}\delta_{in}\delta_{jm}\end{aligned}$$

であるが $\langle T_l(g)\psi_i,\psi_j\rangle=t^l_{ji}(g),\langle\psi_m,T_l(g)\psi_n\rangle=(t^l_{mn}(g))^*$ より、

$$\forall\psi_i,\psi_j,\psi_m,\psi_n\in\mathcal{F}_l:\int_G dg\ t^l_{ji}(g)(t^l_{mn}(g))^*=\frac{1}{\mathrm{dim}\mathcal{F}_l}\delta_{in}\delta_{jm}$$

極座標表示によるパラメータ化を行えば、

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\psi\\&\times\sin^2\theta\sin\psi\ t^l_{ji}(\theta,\psi,\phi)(t^l_{mn}(\theta,\psi,\phi))^*\\&=\frac{1}{\mathrm{dim}\mathcal{F}_l}\delta_{in}\delta_{jm}\end{aligned}$$

となる。したがって $\mathrm{dim}\mathcal{F}_l=2l+1$ を用いると、

$$\left\{\sqrt{\frac{2\pi^2}{2l+1}}t^l_{mn}(\theta,\psi,\phi)|m,n=-l,-l+1,\cdots,l-1,l\right\}$$

はこれらが張る S^3 上の関数空間（$L^2(S^3)$ の部分空間）における正規直交基底を成していることが分かる。（次元は $(2l+1)^2$）この関数空間は $SO(4)$ の作用に対して既約である。

■リー代数による導出との関係

リー代数 $so(4)$ が $su(2)$ の直和であることを利用すると、$2l$ 次の四次元球面調和関数を $su(2)$ のテンソル表現として表すことが出来る。すなわち、

$$\{\psi_m \otimes \psi_n | m, n = -l, -l+1, \cdots, l-1, l\}$$

が正規直交基底となる。（ここは加筆したい）