# $SO(4)$ 群と $so(4)$ 代数の表現論（その１）

adhara*

2016 年 12 月 18 日

## 1　$SO(4)$ 群と $so(4)$ 代数

### 1.1　$SO(4)$ 群

$SO(4)$ 群は四次元実空間上のベクトル

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^4 \tag{1}$$

* Twitter @adhara_mathphys

の狭義回転行列がなすリー群である。狭義とは行列式が 1 となることを意味し、このためにリー群 $SO(4)$ は連結多様体となる。

リー群 $SO(4)$ は多様体の次元としては、6 次元である。すなわち、6 つの独立した回転生成行列

$$L_{yz} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ L_{zx} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$L_{xy} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ L_{xw} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$L_{yw} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix},\ L_{zw} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

によって生成される。それぞれ、$yz,\ zx,\ xy,\ xw,\ yw,\ zw$ 平面に関する回転生成行列である。

四次元空間における回転群 $SO(4)$ はこれらの回転生成行列を用いた指数行列が成す群として表現される。

$$SO(4) = \left\{ \exp\left(-i(\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{L} + \boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{M})\right) \middle| \boldsymbol{l}, \boldsymbol{m} \in \boldsymbol{R}^3 \right\} \tag{3}$$

ただし、$L_x = L_{yz},\ L_y = L_{zx},\ L_z = L_{xy},\ M_x = L_{xw},\ M_y = L_{yw},\ M_z = L_{zw}$ とした。

## 1.2　$so(4)$ 代数

6 つの回転生成行列の間には交換関係ブラケット演算

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk} L_k \tag{4}$$
$$[M_i, L_j] = i\epsilon_{ijk} M_k \tag{5}$$
$$[M_i, M_j] = i\epsilon_{ijk} L_k \tag{6}$$

が成立する。（アインシュタインの縮約を用いた。）これらの 6 つの演算子を基底とし、上記の交換関係ブラケット演算をリーブラケット演算としたリー代数が $so(4)$ 代数である。（リー代数に必要なヤコビ律等が成立している。）

## 1.3　$so(4)$ 代数の直和分解

リー代数の基底変換

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{M}\right) \tag{7}$$
$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{L} - \boldsymbol{M}\right) \tag{8}$$

を導入する。このとき新しい基底については交換関係

$$[A_i, A_j] = i\sum_m \epsilon_{ijm} A_m \tag{9}$$

$$[B_i, B_j] = i\sum_m \epsilon_{ijm} B_m \tag{10}$$

$$[A_i, B_j] = 0 \tag{11}$$

が成立する。したがって、$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ の各成分それぞれが独立に $su(2)$ 代数の基底となって部分代数を成していることが分かる。すなわち、$so(4)$ 代数は独立な $su(2)$ 代数の直和として表現することが出来る。

$$so(4) = su(2) \oplus su(2) \tag{12}$$

このことは $so(4)$ 代数が半単純代数ではあるが単純代数ではないという事実を表している。

これ以降では $so(4)$ 代数およびそれによって生成されるリー群（$SO(4)$ 群やその被覆群 $SU(2) \times SU(2)$、ほかには $SO(3) \times SO(3)$, $SU(2) \times SO(3)$ など）の表現論を展開する。したがって、$so(4)$ 代数の表現が式 2 とは限らない。（式 2 は defining representation と呼ばれる。）それにあたり、二種類の直和表現について記述しておく。

# 2　二種類の直和表現

式 12 のように直和を導入したが、リー代数の直和 $su(2) \oplus su(2)$ の表現（もちろん行列への表現、線形表現である）

$$\rho : su(2) \oplus su(2) \to \mathrm{Hom}(V, V) \tag{13}$$

を考えたときに二種類の表現が考えられる。（$V$ は表現空間）通常の直和表現とクロネッカー直和表現である。リー代数 $su(2)$ の二種類の直和表現に対応して、（Baker-Haussdorff-Campbell 公式を用いることにより）リー群 $SO(4)$ も二種類の**直積表現**が存在する。

## 2.1　線形空間の直和表現

$su(2)$ の二種類の表現

$$\rho' : su(2) \to \mathrm{Hom}(V', V') \tag{14}$$
$$\rho'' : su(2) \to \mathrm{Hom}(V'', V'') \tag{15}$$

を考える。（$V', V''$ はそれぞれ表現空間）

$$V = V' \oplus V'' \tag{16}$$

を線形空間の直和の意味で定義する。すなわち、

$$V = \{v' + v'' | v' \in V', v'' \in V''\},\ V' \cap V'' = \{0\}$$

とする。直和空間の次元は

$$\dim(V) = \dim(V') + \dim(V'') \tag{17}$$

である。

リー代数 $su(2) \oplus su(2)$ のこの意味での直和表現は

$$\begin{aligned}\rho : su(2) \oplus su(2) &\to \mathrm{Hom}(V, V) = \mathrm{Hom}(V', V') \times \mathrm{Hom}(V'', V'') \\ : (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{B}) &\mapsto \begin{pmatrix} \rho'(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{A}) & 0 \\ 0 & \rho''(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{B}) \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{18}$$

のようになる。（$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^3$）

このリー代数から生成されるリー群

$$G = \left\{ \exp\left(-i(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{A} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{B})\right) | \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^3 \right\} \tag{19}$$

に対する表現は、

$$\begin{aligned}\tilde{\rho} \ : \ G &\to \mathrm{Aut}(V, V) = \mathrm{Aut}(V', V') \times \mathrm{Aut}(V'', V'') \\ : \ \exp\left(-i(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{A} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{B})\right) &\mapsto \begin{pmatrix} e^{-i\rho'(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{A})} & 0 \\ 0 & e^{-i\rho''(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{B})} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-i\rho'(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{A})} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\rho'(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{B})} \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{20}$$

であり、すなわち $su(2)$ 代数の表現の直積となる。

## 2.2　テンソル表現

$V$ をテンソル空間として定義する。すなわち、

$$V = V' \otimes_K V'' \tag{21}$$

（$V', V'', V$ はすべて体 $K$ 上の線形空間とした）とする。これはテンソル積 $\boldsymbol{e}'_i \times \boldsymbol{e}''_j$ を基底とする線形空間である。（以下、$K$ の添字を省略する。）（$\boldsymbol{e}'_i \in V',\ \boldsymbol{e}''_j \in V''$ はそれぞれの基底）このテンソル空間の次元は

$$\dim(V) = \dim(V') \times \dim(V'') \tag{22}$$

である。

表現についてもテンソル積 $\rho' \otimes \rho''$ を定義でき、テンソル空間の元 $v' \otimes v''$ に対して、

$$(\rho' \otimes \rho'')(v' \otimes v'') = \rho'(v') \otimes \rho''(v'') \tag{23}$$

のように作用する。テンソル積を行列として表現したものが、クロネッカー積と呼ばれる。

リー代数 $su(2) \oplus su(2)$ のこの意味での直和表現は

$$\begin{aligned}\rho &: su(2) \oplus su(2) \to \mathrm{Hom}(V, V) = \mathrm{Hom}(V', V') \otimes \mathrm{Hom}(V'', V'') \\ &: (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{B}) \mapsto \rho(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{A}) \otimes 1_{V'} + 1_{V''} \otimes \rho(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{B})\end{aligned} \tag{24}$$

のようになる。（$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^3$ であり、1 はそれぞれの表現空間の恒等写像）ここで、

$$\begin{aligned}&\exp(-i(\rho(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{A}) \otimes 1_{V'} + 1_{V''} \otimes \rho(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{B})) \\ &= \exp(-i(\rho(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{A}))) \otimes \exp(-i(\rho(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{B})))\end{aligned} \tag{25}$$

となることを用いると、リー代数から生成されるリー群の表現は、

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}\ &:\ G \to \mathrm{Aut}(V,V) = \mathrm{Aut}(V',V') \otimes \mathrm{Aut}(V'',V'') \\ &:\ \exp\left(-i(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{A} + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{B})\right) \\ &\mapsto \exp(-i(\rho(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{A}))) \otimes \exp(-i(\rho(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}))) \end{aligned} \tag{26}$$

であり、すなわち $su(2)$ 代数のテンソル表現の直積（行列としてはクロネッカー直積）となる。

# 3 $so(4)$ 代数の既約表現

階数が 2 なので $so(4)$ 代数では独立なカシミール演算子（各基底と交換可能な演算子）が二つ存在する。例えば $\boldsymbol{A}^2$ と $\boldsymbol{B}^2$ を選べる。したがって、$so(4)$ 代数の既約表現を考えたときにその表現空間では $\boldsymbol{A}^2$、$\boldsymbol{B}^2$ はスカラーとなる。

$\boldsymbol{A}$ の成分を基底とする $su(2)$ 代数の既約表現空間は、非負の整数または半整数 $l_a$ で指定され、

$$V'_{l_a} = \mathrm{Span}\left\{|l_a, m_a\rangle_a | m_a = -l_a, -l_a+1, \cdots, l_a-1, l_a\right\}$$

のように表される。ただし、$|l_a, m_a\rangle_a$ は $\boldsymbol{A}^2, A_z$ の同時固有状態であり、

$$\boldsymbol{A}^2|l_a, m_a\rangle_a = l_a(l_a+1)|l_a, m_a\rangle_a \tag{27}$$

$$A_z|l_a, m_a\rangle_a = m_a|l_a, m_a\rangle_a \tag{28}$$

である。

同様に $\boldsymbol{B}$ の成分を基底とする $su(2)$ 代数の既約表現空間は、非負の整数または半整数 $l_b$ で指定され、

$$V''_{l_b} = \mathrm{Span}\{|l_b, m_b\rangle_b | m_b = -l_b, -l_b+1, \cdots, l_b-1, l_b\}$$

のように表される。同様に $|l_b, m_b\rangle_b$ は $\boldsymbol{B}^2, B_z$ の同時固有状態であり、

$$\boldsymbol{B}^2|l_b, m_b\rangle_b = l_b(l_b+1)|l_b, m_b\rangle_b \tag{29}$$
$$B_z|l_b, m_b\rangle_b = m_b|l_b, m_b\rangle_b \tag{30}$$

である。

テンソル表現空間 $V'_{l_a} \otimes V''_{l_b}$ は $(2l_a+1)(2l_b+1)$ 次元となり、$so(4)$ 代数の既約表現空間となる。

$$\boldsymbol{A}^2|l_a, m_a\rangle_a = l_a(l_a+1)|l_a, m_a\rangle_a \otimes |l_b, m_b\rangle_b \tag{31}$$
$$\boldsymbol{B}^2|l_b, m_b\rangle_b = l_b(l_b+1)|l_a, m_a\rangle_a \otimes |l_b, m_b\rangle_b \tag{32}$$

### 3.1 $so(4)$ 代数の線形直和表現が一般に既約表現とならないこと

直和表現空間 $V' \oplus V''$ は既約表現とならない、

$$\boldsymbol{A}^2|l_b, m_b\rangle_b = 0 \tag{33}$$
$$\boldsymbol{A}^2|l_a, m_a\rangle_a = l_a(l_a+1)|l_a, m_a\rangle_a \tag{34}$$
$$\boldsymbol{B}^2|l_b, m_b\rangle_b = l_b(l_b+1)|l_b, m_b\rangle_b \tag{35}$$
$$\boldsymbol{B}^2|l_a, m_a\rangle_a = 0 \tag{36}$$

となっている。シューアの補題からは既約表現においてはカシミール演算子は恒等写像の定数倍となることがわかる。しかしながら $l_a = l_b = 0$ のとき以外はそうはなっていない。したがって一般に直和表現空間は既約表現空間とはならない。

## 4 $so(4)$ 代数から生成されるリー群

### 4.1 普遍被覆群 $SU(2) \times SU(2)$

リーの理論によればリー代数から生成されるリー群には同型を除いて唯一の普遍被覆群（universal covering group）が存在する。普遍被覆群は単連結の多様体となるという特徴がある。

$so(4)$ 代数に関する普遍被覆群は $SU(2)\times SU(2)$ 群である。

$$SU(2)\times SU(2) := \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \middle| A, B \in SU(2) \right\} \quad (37)$$

$SU(2)\times SU(2)$ の表現はリー代数 $so(4)$ 代数の線形直和表現であるから既約表現ではない。すなわち、ベクトルの上半分成分と下半分成分の成す空間で直和分解可能である。

## 4.2 $SO(4)$ 群

先に、$SO(4)$ 群が

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{M}\right) \quad (38)$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{L} - \boldsymbol{M}\right) \quad (39)$$

から生成されることを見た。

$$SO(4) = \left\{ \exp\left(-i(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{A} + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{B})\right) | \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^3 \right\} \quad (40)$$

ここで、$S$ として任意に $4\times 4$ ユニタリ行列を選ぶ。このとき、

$$SO(4) = \left\{ \exp\left(-iS^\dagger(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{A} + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{B})S\right) | \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^3 \right\} \quad (41)$$

である。とくに、

$$S=\sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ i & 0 & 0 & i\\ 0 & -1 & -1 & 0\\ 0 & -i & i & 0\end{pmatrix} \tag{42}$$

とすると、

$$S^\dagger A_i S=\frac{\sigma_i}{2}\otimes 1,\ S^\dagger B_i S=1\otimes\frac{\sigma_i}{2} \tag{43}$$

が成立する。ただし、

$$\sigma_x=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ \sigma_y=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix},\ \sigma_z=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \tag{44}$$

であり、$2\times 2$ 行列のクロネッカー積 $C\otimes D$ は

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}d_{11} & d_{12}\\ d_{21} & d_{22}\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}c_{11}d_{11} & c_{11}d_{12} & c_{12}d_{11} & c_{12}d_{12}\\ c_{11}d_{21} & c_{11}d_{22} & c_{12}d_{21} & c_{12}d_{22}\\ c_{21}d_{11} & c_{21}d_{12} & c_{22}d_{11} & c_{22}d_{12}\\ c_{21}d_{21} & c_{21}d_{22} & c_{22}d_{21} & c_{22}d_{22}\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{45}$$

という演算である。

　したがって、

$$\begin{aligned}&\exp\left(-iS^\dagger(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{B})S\right)\\ &=\exp\left(-i\left(\boldsymbol{a}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\otimes 1+\boldsymbol{b}\cdot 1\otimes\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right)\right)\\ &=\exp\left(-i\boldsymbol{a}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right)\otimes\exp\left(-i\boldsymbol{b}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right)\end{aligned} \tag{46}$$

となる。

上記のように $SO(4)$ を線形表現することにより、テンソル既約表現 $(l_a, l_b) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ のケースであることがわかる。

■$SU(2) \times SU(2)$ と $SO(4)$ の関係

群同型

$$SU(2) \times SU(2) \simeq \left\{ \begin{pmatrix} \exp\left(-i\boldsymbol{a} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-i\boldsymbol{b} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right) \end{pmatrix} \middle| \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^3 \right\} \tag{47}$$

が存在する。

$SU(2) \times SU(2)$（に同型な行列群）から $SO(4)$（に同型な行列群）への群同型

$$\begin{aligned} \psi \ : \ & \begin{pmatrix} \exp\left(-i\boldsymbol{a} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-i\boldsymbol{b} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right) \end{pmatrix} \\ & \mapsto \exp\left(-i\boldsymbol{a} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right) \otimes \exp\left(-i\boldsymbol{b} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right) \end{aligned} \tag{48}$$

を考えると、

$$\mathrm{Ker}(\psi) = \left\{ 1, \ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \tag{49}$$

であることがわかる。

## 4.3 $SU(2) \times SO(3)$ 群

$$SU(2) \times SO(3) := \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix} \middle| A \in SU(2),\ B' \in SO(3) \right\} \tag{50}$$

が定義である。

$$l_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix},\ l_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix},\ l_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{51}$$

を導入すると、

$$SU(2) \times SO(3) \simeq \left\{ \begin{pmatrix} \exp\left(-i\boldsymbol{a} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-i\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{l}\right) \end{pmatrix} \middle| \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^3 \right\} \tag{52}$$

この群は

$$
\begin{aligned}
&\left\{ \exp\left(-i\boldsymbol{a}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right)\otimes\exp\left(-i\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{l}\right) \middle| \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{R}^3 \right\} \\
&= \left\{ \exp\left(-i\left(\boldsymbol{a}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\otimes 1 + \boldsymbol{b}\cdot 1\otimes\boldsymbol{l}\right)\right) \middle| \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{R}^3 \right\} \qquad (53)
\end{aligned}
$$

と同型である。

上記のように $SU(2)\times SO(3)$ を線形表現することにより、テンソル既約表現 $(l_a, l_b) = (\frac{1}{2}, 1)$ のケースであることがわかる。

■$SU(2)\times SU(2)$ と $SU(2)\times SO(3)$ の関係

$SU(2)\times SU(2)$（に同型な行列群）から $SU(2)\times SO(3)$（に同型な行列群）

$$
\begin{aligned}
\psi \ : \ &\begin{pmatrix} \exp\left(-i\boldsymbol{a}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-i\boldsymbol{b}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right) \end{pmatrix} \\
\mapsto &\begin{pmatrix} \exp\left(-i\boldsymbol{a}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-i\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{l}\right) \end{pmatrix} \qquad (54)
\end{aligned}
$$

を考えると、

$$
\mathrm{Ker}(\psi) = \left\{ 1, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \qquad (55)
$$

であることがわかる。

## 4.4 $SO(3) \times SO(3)$ 群

$$SO(3) \times SO(3) := \left\{ \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix} \middle| A',\ B' \in SO(3) \right\} \tag{56}$$

が定義である。

線形表現として、

$$SO(3) \times SO(3) \simeq \left\{ \begin{pmatrix} \exp\left(-i\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{l}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-i\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{l}\right) \end{pmatrix} \middle| \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^3 \right\} \tag{57}$$

が存在する。

この群は

$$\begin{aligned} &\left\{ \exp\left(-i\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{l}\right) \otimes \exp\left(-i\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{l}\right) \middle| \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^3 \right\} \\ =& \left\{ \exp\left(-i\left(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{l}\otimes 1 + \boldsymbol{b}\cdot 1 \otimes \boldsymbol{l}\right)\right) \middle| \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^3 \right\} \end{aligned} \tag{58}$$

と同型である。

上記のように $SO(3) \times SO(3)$ を線形表現することにより、

テンソル既約表現 $(l_a, l_b) = (1, 1)$ のケースであることがわかる。

**■$SU(2) \times SU(2)$ と $SO(3) \times SO(3)$ の関係**

$SU(2) \times SU(2)$（に同型な行列群）から $SO(3) \times SO(3)$（に同型な行列群）への群同型

$$\begin{aligned}\psi \ : \ &\begin{pmatrix} \exp\left(-i\boldsymbol{a} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-i\boldsymbol{b} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right) \end{pmatrix} \\ &\mapsto \begin{pmatrix} \exp\left(-i\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{l}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-i\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{l}\right) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{59}$$

を考えると、

$$\mathrm{Ker}(\psi) = \left\{ 1, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \tag{60}$$

であることがわかる。