$SO(4)$ 群と $so(4)$ 代数の表現論（その２）

adhara*

2016 年 12 月 18 日

このノートではリー代数が $so(4)$ 代数となる二つのリー群、$SU(2)\times SO(3)$ と $SO(4)$ の関係について議論する。

1　$SU(2)\times SU(2)$ の商群であること

まず、$SU(2)\times SO(3)$ と $SO(4)$ がともに $SU(2)\times SU(2)$ の商群であることを示す。

以前のノートで書いたように、$SU(2)\times SU(2)$ はパウリ行列

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

* Twitter @adhara_mathphys

を用いて作られる指数行列の直積と群同型である。すなわち、

$$SU(2)\times SU(2)\simeq\left\{\begin{pmatrix}\exp\left(-i\boldsymbol{a}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right) & 0\\ 0 & \exp\left(-i\boldsymbol{b}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right)\end{pmatrix}\middle|\,\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{R}^3\right\} \tag{2}$$

が成立する。以下では $SU(2)\times SU(2)$ 群をこの線形表現と同一視する。

一方、$SO(4)$ はクロネッカー積を用いて線形表現を行うことが出来る。

$$SO(4)\simeq\left\{\exp\left(-i\boldsymbol{a}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right)\otimes\exp\left(-i\boldsymbol{b}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right)\middle|\,\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{R}^3\right\} \tag{3}$$

$SO(4)$ 群も上記の線形表現と同一視する。

さらに $SU(2)\times SO(3)$ はクロネッカー積あるいは直積用いて線形表現を行うことが出来る。

$$\begin{aligned}SU(2)\times SO(3)&\simeq\left\{\begin{pmatrix}\exp\left(-i\boldsymbol{a}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right) & 0\\ 0 & \exp\left(-i\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{l}\right)\end{pmatrix}\middle|\,\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{R}^3\right\}\\ &\simeq\left\{\exp\left(-i\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{l}\right)\otimes\exp\left(-i\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{l}\right)\middle|\,\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{R}^3\right\}\end{aligned} \tag{4}$$

ただし、$SO(3)$ 群の生成行列

$$l_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \ l_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ l_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

を導入している。$SU(2) \times SO(3)$ 群も上記の線形表現と同一視する。

1.1 $SO(4)$ が商群であること

$SU(2) \times SU(2)$ 群から $SO(4)$ 群への群同型

$$\begin{aligned} \psi_1 \ : \ & \begin{pmatrix} \exp\left(-i\boldsymbol{a} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-i\boldsymbol{b} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right) \end{pmatrix} \\ & \mapsto \exp\left(-i\boldsymbol{a} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right) \otimes \exp\left(-i\boldsymbol{b} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right) \end{aligned} \tag{6}$$

を考えると、

$$\mathrm{Ker}(\psi_1) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \tag{7}$$

であることがわかる。ただし、行列中の 1 は 2×2 の単位行列である。

したがって、

$$
\begin{aligned}
SO(4) &= \mathrm{Im}(\psi_1) \\
&\simeq \left(SU(2) \times SU(2)\right) / \mathrm{Ker}(\psi_1) \\
&= \left(SU(2) \times SU(2)\right) \Bigg/ \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}
$$

となり商群であることがわかる。（$\mathrm{Ker}(\psi_1)$ は $SU(2) \times SU(2)$ の正規部分群）

1.2 $SU(2) \times SO(3)$ が商群であること

$SU(2) \times SU(2)$ 群から $SU(2) \times SO(3)$ 群への群同型

$$
\begin{aligned}
\psi_2 \ : \ & \begin{pmatrix} \exp\left(-i\boldsymbol{a} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-i\boldsymbol{b} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right) \end{pmatrix} \\
& \rightarrow \begin{pmatrix} \exp\left(-i\boldsymbol{a} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-i\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{l}\right) \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

を考えると、

$$
\mathrm{Ker}(\psi_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \tag{9}
$$

であることがわかる。ただし、行列中の 1 は 2×2 の単位行列である。

したがって、

$$\begin{aligned}
SU(2)\times SO(3) &= \mathrm{Im}(\psi_2) \\
&\simeq \left(SU(2)\times SU(2)\right)/\mathrm{Ker}(\psi_2) \\
&= \left(SU(2)\times SU(2)\right) \Big/ \left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right\}
\end{aligned}$$

となり商群であることがわかる。（$\mathrm{Ker}(\psi_2)$ は $SU(2)\times SU(2)$ の正規部分群）

2　$SU(2)\times SO(3)$ と $SO(4)$ の関係

$H_i = \mathrm{Ker}(\psi_i)$、$G = SU(2) = \{\exp\left(-i\boldsymbol{a}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right)|\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{R}^3\}$ とする。（$H_1 = \{(1_G,1_G),(-1_G,-1_G)\}$, $H_2 = \{(1_G,1_G),(1_G,-1_G)\}$）このとき、群同型

$$SO(4)\simeq\{(x,y)H_1|x,y\in G\} \tag{10}$$
$$SU(2)\times SO(3)\simeq\{(x,y)H_2|x,y\in G\} \tag{11}$$

が成立する。（右辺については $(x,y)H_i(x',y')H_i = (xx',yy')H_i$ が群の演算、単位元は $(1_G,1_G)H_i$）

以下、この群同型による表現を利用する。

2.1 $SO(4)$ に $SU(2)$ に同型な正規部分群があること

$SO(4)$ には部分群が無数にあるが、とくに

$$K_1 = \{(x, 1_G)H_1 | x \in G\} \tag{12}$$

という部分群は正規部分群である。正規部分群であることは、任意に

$$(x, y)H_1 \in SO(4) \tag{13}$$

を取ったときに

$$\begin{aligned} (x, y)H_1 K_1 &= \{(xx', y)H_1 | x' \in G\} \\ &= \{(x', y)H_1 | x' \in G\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_1(x, y)H_1 &= \{(x'x, y)H_1 | x' \in G\} \\ &= \{(x', y)H_1 | x' \in G\} \end{aligned}$$

より、

$$K_1(x, y)H_1 = (x, y)H_1 K_1 \tag{14}$$

となることから分かる。

群準同型

$$SU(2) \to K_1 : x \mapsto (x, 1_G)H_1 \tag{15}$$

に対して、Ker が 1_G しか含まないことから $SU(2) \simeq K_1$ である。

2.2　$SO(4)/K_1 \simeq SO(3)$ であること

前節の結果より、

$$\begin{aligned} SO(4)/K_1 &= \{(x,y)H_1 | x, y \in G\} / \{(x, 1_G)H_1 | x \in G\} \\ &= \left\{ \{(x', y)H_1 | x' \in G\} \,\middle|\, y \in G \right\} =: L_1 \end{aligned} \tag{16}$$

は群である。ただし、最右辺において群の演算は

$$\begin{aligned} &\{(x', y)H_1 | x' \in G\} \{(x', y')H_1 | x' \in G\} \\ &= \{(x', yy')H_1 | x' \in G\} \end{aligned}$$

によって定義され、単位元は

$$\{(x', 1_G)H_1 | x' \in G\}$$

である。

ここで、全射群準同型

$$\Psi : G \to L_1 : y \mapsto \{(x', y)H_1 | x' \in G\} \tag{17}$$

を考えると、

$$\mathrm{Ker}(\Psi) = \{1_G, -1_G\} \tag{18}$$

であるから、

$$G/K_1 \simeq L_1 \simeq G/\mathrm{Ker}(\Psi) \simeq SO(3) \tag{19}$$

となる。

2.3　$SO(4)$ が半直積で表されること

　$SO(4)$ の部分集合

$$L_1' = \{(x,x)H_1 | x \in G\} \subset SO(4) \tag{20}$$

を考えるとこれは $SO(4)$ の部分群となっている。

　全射群準同型

$$\Psi' : G \to L_1' : x \mapsto (x,x)H_1 \tag{21}$$

を考えると、

$$\mathrm{Ker}(\Psi') = \{1_G, -1_G\} \tag{22}$$

であるから、

$$L_1' \simeq G/\mathrm{Ker}'(\Psi) \simeq SO(3) \simeq L_1 \simeq SO(4)/K_1 \tag{23}$$

となる。

　一方、埋め込み写像

$$\rho : L_1' \hookrightarrow SO(4) : (x,x)H_1 \mapsto (x,x)H_1 \tag{24}$$

と自然写像

$$
\begin{aligned}
\eta &: SO(4) \to SO(4)/K \\
&: (x,y)H_1 \mapsto \left\{ \{(x',y)H_1 | x' \in G\} \middle| y \in G \right\}
\end{aligned} \tag{25}
$$

の合成写像

$$\eta \circ \rho : L_1' \to SO(4)/K_1 \tag{26}$$

を考えるとこれは L_1' から $L_1 := SO(4)/K_1$ への同型写像となっている。

　このことから

$$SO(4) = K_1 \rtimes L_1' \tag{27}$$

と書ける。（半直積の性質より）

　直接確かめることもできるが、

$$SO(4) = K_1 L_1',\ K_1 \cap L_1' = 1_{SO(4)} \tag{28}$$

等が言える。

2.4　$SO(4)$ を直積で書けないこと

　一般に

$$(x, 1_G)H_1(y,y)H_1 = (xy,y)H_1 \neq (yx,y)H_1 = (y,y)H_1(x,1_G) \tag{29}$$

より、L_1' と K の成分は可換ではない。したがって、$SO(4)$ を $SO(3)$ と $SU(2)$ の直積で書くことは出来ない。（$SO(4)$ の部分群のなかで $SU(2)$ と同型なものは K_1 以外にもあるのでそれらについても本当は議論しなくてはいけないが。）

2.5　$SU(2) \times SO(3)$ と $SO(4)$ の関係

写像

$$\Phi : SU(2) \times SO(3) \to G : (x, y)H_2 \mapsto (xy^{-1}, 1_G)(y, y)H_1 \tag{30}$$

を考える。（$x, y \in SU(2)$）これは連続全単射である。前者であることは、$SO(4) = L_1' K_1$ より、単射であることは、

$$\begin{aligned} & \Phi((x, y)H_2) = (1_G, 1_G)H_1 \\ \Longleftrightarrow & (x, y) = (1_G, 1_G) \text{ or } (1, -1_G) \\ \Longleftrightarrow & (x, y) \in H_2 \end{aligned} \tag{31}$$

より、

$$\mathrm{Ker}(\Phi) = 1_{SU(2) \times SO(3)} \tag{32}$$

から言える。