$SU(2)$ 群と $su(2)$ 代数の表現論（その３）
～ ボソン演算子の導入 ～

adhara

2017 年 9 月 18 日

第一章は $SU(2)$ 群の有限次元既約ユニタリ表現に関するおさらいである。それ以降で出てくる記号の約束等が書いてある。第二章が本ノートの主題である。すなわち異なる有限次元既約ユニタリ表現に属する関数同士を結びつける演算子＝ボソン演算子を導入する、ということを行う。これは「Jordan-Schwinger による $SU(2)$ のボソン化」と呼ばれる。すなわち

1　$SU(2)$ 群の有限次元既約ユニタリ表現に関するおさらい

1.1　複素二変数関数の集合への作用

群 $GL(2,\boldsymbol{C})(\supset SU(2))$ の複素二変数関数の集合 $\mathcal{F}$ への作用を考える。

すなわち、

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2,\boldsymbol{C}) \tag{1}$$

として、$f \in \mathcal{F}$ に対して

$$g\left[f\right](z_1, z_2) = f(az_1 + cz_2, bz_1 + dz_2) \tag{2}$$

のように作用するものとする。行列の作用を陽に書くと、

$$\begin{pmatrix} az_1 + cz_2 & bz_1 + dz_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{3}$$

となっており、$g, h \in GL(2,\boldsymbol{C})$ とすると、

$$(gh)[f] = g[h[f]] \tag{4}$$

となっており、群の左作用となっていることが分かる。この作用は変数に対する一次分数変換を行っているのである。

1.2　複素二変数斉次多項式空間に対する表現

表現を考えるためには作用する対象はただの集合ではなく、線形空間（ベクトル空間）である必要がある。したがって上記の作用する部分集合でベクトル空間となっているものを考えることとしたい。

ここでは、作用する対象を $\mathcal{F}$ の部分集合である複素係数二変数 $2l$ 次斉次多項式の集合

$$\mathcal{F}_l = \left\{ f(z_1, z_2) \middle| \sum_{n=-l}^{l} a_n z_1^{l-n} z_2^{l+n} \quad (a_n \in \boldsymbol{C}) \right\} \tag{5}$$

とする。ただし $l \geq 0$ は整数または半整数とし、n は $l-n$ や $l+n$ が整数になるように動くものとする。$\mathcal{F}_l$ は $2l+1$ 次元複素ベクトル空間と見なせる。この限定した作用は単なる作用ではなく表現となる。すなわち $2l+1$ 次元複素ベクトル空間への表現となっている。

今導入した $2l+1$ 次元（複素）ベクトル空間への表現のことを

$$(T_l, \mathcal{F}_l) \tag{6}$$

と書く。T_l の定義域を $SU(2)$ に限定すれば、それは $SU(2)$ の表現である。

■一変数化

上で導入した表現と等価な表現を一変数の多項式への作用から作ることも可能である。すなわち、

$$F(z) := f(z, 1) \tag{7}$$

を導入すると、

$$f(z_1, z_2) = z_2^{2l} f\left(\frac{z_1}{z_2}, 1\right) = z_2^{2l} F\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \tag{8}$$

と書くことが出来る。

関数 F に対する g の作用は

$$\begin{aligned} [T_l(g)F](z) &= [T_l(g)f](z, 1) \\ &= f(az + c, bz + d) \\ &= (bz + d)^{2l} F\left(\frac{az + c}{bz + d}\right) \end{aligned} \tag{9}$$

によって与えられる。

$\mathcal{F}_l$ を一変数化したときの対応する関数空間を $\tilde{\mathcal{F}}_l$ と書くことにする。対応する表現を $(T_l, \tilde{\mathcal{F}}_l)$ と書く。これは $(T_l, \mathcal{F}_l)$ と等価な表現である。

この $(T_l, \tilde{\mathcal{F}}_l)$ および $(T_l, \tilde{F}_l)$ は既約ユニタリ表現であることについては別のノートで示している。

1.2.1　リー代数 $su(2)$ のおさらい

詳しくは別のノートを参照して欲しいが、

$$A_1 = ilx + \frac{i}{2}(1-x^2)\frac{d}{dx} \tag{10}$$

$$A_2 = -lx + \frac{1}{2}(1+x^2)\frac{d}{dx} \tag{11}$$

$$A_3 = -il + ix\frac{d}{dx} \tag{12}$$

とするとこれらは $su(2)$ 代数のある基底の $\tilde{\mathcal{F}}_l$ に対する表現となっている。

ここで、

$$[A_1, A_2] = A_3 \tag{13}$$

$$[A_i, A_j] = \sum_k \epsilon_{ijk} A_k \tag{14}$$

といった交換関係が成立していることがわかる。

また、

$$H_i = iA_i \quad (i = 1, 2, 3) \tag{15}$$

とするとこれを $su(2)$ 代数のある基底と考えることが出来る。

このとき

$$H_+ := H_1 + iH_2 = -\frac{d}{dx} \tag{16}$$

$$H_- := H_1 - iH_2 = -2lx + x^2\frac{d}{dx} \tag{17}$$

や

$$H_1 = -lx - \frac{1}{2}(1-x^2)\frac{d}{dx} \tag{18}$$

$$H_2 = -ilx + \frac{i}{2}(1+x^2)\frac{d}{dx} \tag{19}$$

$$H_3 = l - x\frac{d}{dx} \tag{20}$$

や

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}^2 &:= H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 && (21) \\ &= \frac{1}{2}\left(H_+H_- + H_-H_+\right) + H_3^2 \\ &= l(l+1) && (22) \end{aligned}$$

$$H_3 x^{l-n} = n x^{l-n} \tag{23}$$

$$H_+ x^{l-n} = -(l-n)x^{l-n-1} \tag{24}$$

$$H_- x^{l-n} = -(l+n)x^{l-n+1} \tag{25}$$

$$H_- x^{2l} = 0 \tag{26}$$

$$H_+ 1 = 0 \tag{27}$$

といったものが成立する。

成立する交換関係は

$$[H_i, H_j] = i\sum_k \epsilon_{ijk} H_k \tag{28}$$

である。

1.3　既約部分空間 $\mathcal{F}_l$ における内積と正規直交基底

　ユニタリ条件と

$$\langle 1, 1 \rangle = 1 \tag{29}$$

を満たすようにエルミート内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を定めると、

$$\psi_{l,k}(z) = \frac{z^{l-k}}{\sqrt{(l-k)!(l+k)!}} \tag{30}$$

としたときに

$$\langle \psi_{l,k}, \psi_{l,m} \rangle = \delta_{km} \tag{31}$$

となることがわかる。$\{\psi_{l,k} | k = -l, -l+1, \cdots, l-1, l\}$ は $\tilde{\mathcal{F}}_l$ の正規直交基底となる。

　一方、

$$\Psi_{l,k}(z_1, z_2) = z_2^{2l} \psi_{l,k}(z_1/z_2) = \frac{z_1^{l-k} z_2^{l+k}}{\sqrt{(l-k)!(l+k)!}} \tag{32}$$

とすればこれは $\mathcal{F}_l$ の正規直交基底となる。（内積はこれらが正規直交基底となるように自然に定まる。ただし $(c\psi, d\phi) = cd^*(\psi, \phi)$ となるものとする。）この内積の定義によれば

$$(z_1^i z_2^j, z_1^k z_2^l) = \delta_{ik}\delta_{jl} i! j! \quad (i, j, k, l \in \boldsymbol{Z}_{\geq 0})$$

となることがわかる。

1.4　複素二変数斉次多項式空間 $\mathcal{F}$ における内積と正規直交基底

複素二変数斉次多項式空間 $\mathcal{F}$ は各既約部分空間の直和となっている、すなわち

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{s=0}^{\infty} \mathcal{F}_{s/2} \tag{33}$$

となる（$\mathcal{F}$ は半単純＝完全可約）。既約部分空間 $\mathcal{F}_l$ 中では内積を上記のように定義し、異なる既約部分空間に属するベクトル間の内積を 0 とすると、$\mathcal{F}$ はこの取り決めと双線形性の条件によって定まる内積に対してヒルベルト空間となる。以下ではこの $\mathcal{F}$ 全体におけるボソン演算子を考える。

2　複素二変数斉次多項式空間 $\mathcal{F}$ におけるボソン演算子の導入

ボソン演算子は交換関係

$$[a_i, a_j^\dagger] = a_i a_j^\dagger - a_j^\dagger a_i = \delta_{ij} \tag{34}$$

を満たす演算子である。（$a_i^\dagger$ は a のエルミート共役演算子）a を消滅演算子、$a^\dagger$ を生成演算子と呼ぶ。

2.1　ボソン演算子の導入

ここでは天下り式ではあるが $i=1,2$ に対して

$$a_i = \frac{d}{dz_i}$$

とおくとこれがボソン演算子（消滅演算子）となる。生成演算子 $a_i^\dagger$ は

$$(\phi(z_1,z_2), a_i\psi(z_1,z_2)) = (a_i^\dagger\phi(z_1,z_2), \psi(z_1,z_2)) \quad (35)$$

を満たすように定まる（エルミート演算子の定義より）。これが満たされるのは $a_i^\dagger = z_i$ のときである。たとえば $i=1$ を考えると ψ,ϕ が単項式の場合で左辺が 0 でないのは

$$\psi(z_1,z_2) = z_1^m z_2^l, \phi(z_1,z_2) = z_1^{m+1}z_2^l$$

の場合のみであるがこのとき

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= (m+1)(z_1^m z_2^l, z_1^m z_2^l) = (m+1)!l! \\ (\text{右辺}) &= (z_1^{m+1}z_2^l, z_1^{m+1}z_2^l) = (m+1)!l!\end{aligned}$$

となり確かに上式は満たされる。したがって、

$$\begin{aligned}[a_i, a_j^\dagger]f(z_1,z_2) &= \frac{\partial z_i f(z_1,z_2)}{\partial z_j} - z_i\frac{\partial f(z_1,z_2)}{\partial z_j} \\ &= \delta_{ij} f(z_1,z_2) \quad (36)\end{aligned}$$

となり確かに a_i がボソン演算子となっていることが分かる。
ボソン演算子は次のような働きをする。

$$a_1\Psi_{l,k} = \sqrt{l-k}\Psi_{l-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \tag{37}$$

$$a_2\Psi_{l,k} = \sqrt{l+k}\Psi_{l-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \tag{38}$$

$$a_1^\dagger\Psi_{l,k} = \sqrt{l-k+1}\Psi_{l+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \tag{39}$$

$$a_2^\dagger\Psi_{l,k} = \sqrt{l+k+1}\Psi_{l+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \tag{40}$$

すなわち消滅演算子は多項式の次数 l を下げ、生成演算子は次数を上げる。a_1, a_2 では k の上げ下げにおいてはたらきが異なり、a_1 は k を上げるが a_2 は k を下げる。これらの動きを図示すると以下のようになる。

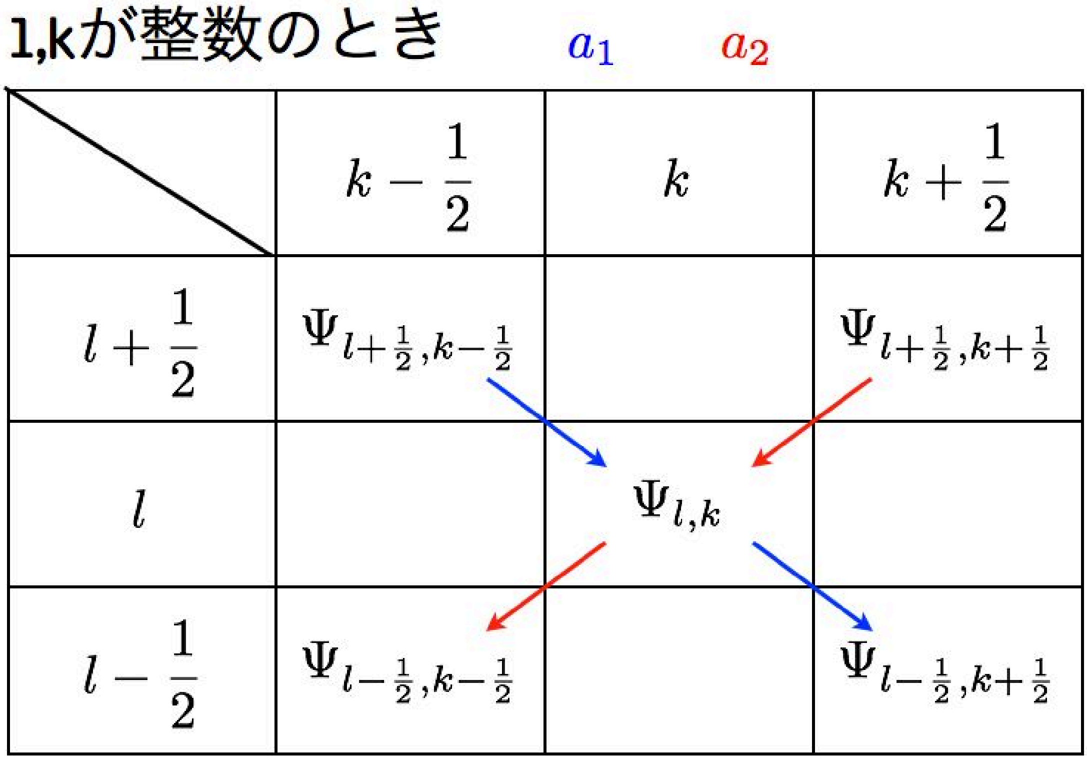

図 1　消滅演算子のはたらき

一方 $\mathcal{F}$ の全ての基底 $\Psi_{l,k}$ は $\Psi_{0,0}$ から生成演算子を用いて表示できることがわかる。すなわち $\Psi_{0,0}$ に対して $a_1^\dagger$ を n 個、$a_2^\dagger$ を m 個、それぞれ作用させると、得られるベクトルは $\Psi_{m+n,(m-n)/2}$ の定数倍となることが分かる。また、

$$|(a_1^\dagger)^n(a_2^\dagger)^m\Psi_{0,0}|^2 = |z_1^n z_2^m|^2 = n!m! \tag{41}$$

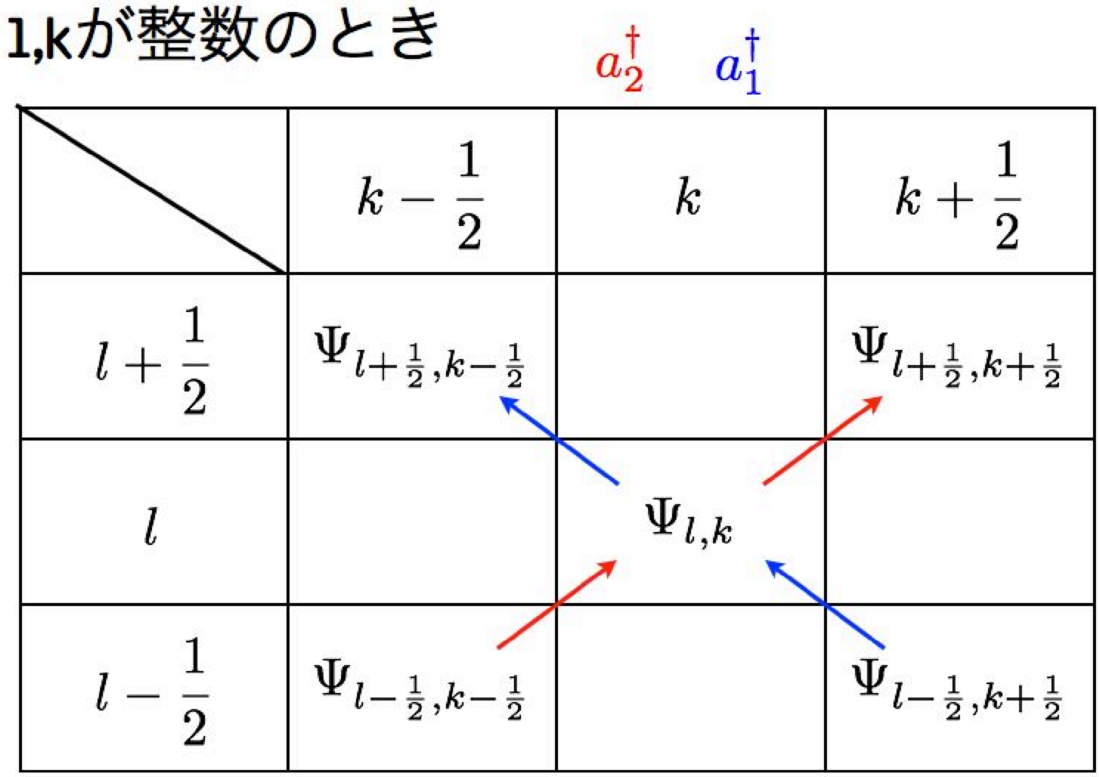

図 2　生成演算子のはたらき

であるから上記の定数とは $\sqrt{n!m!}$ に他ならない。したがって、

$$\Psi_{l,k} = \frac{(a_1^\dagger)^{l-k}(a_2^\dagger)^{l+k}}{\sqrt{(l-k)!(l+k)!}}\Psi_{0,0} \tag{42}$$

となる。

2.2　リー代数 $su(2)$ との対応

　リー代数 $su(2)$ の各演算子は

$$H_3\Psi_{l,k} = k\Psi_{l,k} \tag{43}$$

$$H_+\Psi_{l,k} = -\sqrt{(l-k)(l+k+1)}\Psi_{l,k+1} \tag{44}$$

$$H_-\Psi_{l,k} = -\sqrt{(l+k)(l-k+1)}\Psi_{l,k-1} \tag{45}$$

のように作用する。したがって

$$H_3 = \frac{1}{2}\left(a_2^\dagger a_2 - a_1^\dagger a_1\right) \tag{46}$$

$$H_+ = -a_2^\dagger a_1 \tag{47}$$

$$H_- = -a_1^\dagger a_2 \tag{48}$$

となることがわかる。

　ボソン演算子行列

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \tag{49}$$

$$A^\dagger = \begin{pmatrix} a_1^\dagger & a_2^\dagger \end{pmatrix} \tag{50}$$

とパウリ行列

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{51}$$

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{52}$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{53}$$

を導入すると

$$H_3 = \frac{1}{2}A^\dagger \sigma_z A \tag{54}$$

$$H_+ = -\frac{1}{2}A^\dagger (\sigma_x - i\sigma_y) A \tag{55}$$

$$H_- = -\frac{1}{2}A^\dagger (\sigma_x + i\sigma_y) A \tag{56}$$

と書ける。

さらに $\tilde{A} = \sigma_y A$ と $\sigma_y^\dagger = \sigma_y, \sigma_y \sigma_x \sigma_y = -\sigma_x, \sigma_y \sigma_z \sigma_y = -\sigma_z$ を用いると、

$$H_3 = \frac{1}{2}\tilde{A}^\dagger \sigma_z \tilde{A} \tag{57}$$

$$H_+ = \frac{1}{2}\tilde{A}^\dagger (\sigma_x + i\sigma_y) \tilde{A} \tag{58}$$

$$H_- = \frac{1}{2}\tilde{A}^\dagger (\sigma_x - i\sigma_y) \tilde{A} \tag{59}$$

と書け、

$$H_1 = \frac{1}{2}\tilde{A}^\dagger \sigma_x \tilde{A} \tag{60}$$

$$H_2 = \frac{1}{2}\tilde{A}^\dagger \sigma_y \tilde{A} \tag{61}$$

$$\tag{62}$$

となる。