$SU(2)$ 群と $su(2)$ 代数の表現論（その１）

〜$SU(2)$ 群と $su(2)$ 代数の導入〜

adhara*

2016 年 12 月 18 日

1　いくつかのリー群の定義

複素数を要素とする行列によって定義できるリー群をいくつか定義する。

■$GL(N,\boldsymbol{C})$

複素一般線形群 $GL(N,\boldsymbol{C})$ は複素数を要素とする N 次元正方行列のうち、行列式が 0 でないものの集合である。すな

* Twitter @adhara_mathphys

わち、

$$GL(N,\boldsymbol{C}) = \{g \in M(N,\boldsymbol{C}) | \det(g) \neq 0\} \tag{1}$$

となっている。ただし $M(N,\boldsymbol{C})$ は複素数を要素とする N 次元正方行列である。行列式が 0 でないことにより、逆元の存在が保証されて群を成すことが出来ている。群 $GL(N,\boldsymbol{C})$ は N 次元複素ベクトル空間 $\boldsymbol{C}^N$ に対して作用する。作用のやり方は行列とベクトルの積である。すなわち $g \in GL(N,\boldsymbol{C})$ が v に作用するとき、

$$(gv)_i = \sum_j g_{ij} v_j \tag{2}$$

であるとする。

実多様体としての次元は、

$$\dim_{\boldsymbol{R}}(GL(N,\boldsymbol{C})) = 2N^2 \tag{3}$$

となる。

■$U(N,\boldsymbol{C})$

次にユニタリ群を導入したいのだが、その前にベクトル空間にエルミート内積を導入し、エルミート内積空間を考える。エルミート内積

$$\langle , \rangle : \boldsymbol{C}^N \times \boldsymbol{C}^N \to \boldsymbol{C} \tag{4}$$

は

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle^* \tag{5}$$
$$\langle c_1 \boldsymbol{a}_1 + c_2 \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b} \rangle = c_1 \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b} \rangle + c_2 \langle \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b} \rangle \tag{6}$$

等の性質が成り立つ双線形写像である。

ユニタリ群は $U(N, \boldsymbol{C})$ は作用したときにエルミート内積を保存するという性質をもつ $GL(N, \boldsymbol{C})$ 群の部分群である。すなわち、

$$U(N, \boldsymbol{C}) = \left\{ A \in GL(2, \boldsymbol{C}) | \forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{C}^N : \langle A\boldsymbol{a}, A\boldsymbol{b} \rangle = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \right\} \tag{7}$$

のように定義できる。ここで、行列のエルミート共役（転置して複素共役を取る操作）を † で表したとき、

$$\langle A\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \langle \boldsymbol{a}, A^\dagger \boldsymbol{b} \rangle \tag{8}$$

となる事実を用いると、

$$U(N, \boldsymbol{C}) = \left\{ A \in GL(N, \boldsymbol{C}) | AA^\dagger = 1 \right\} \tag{9}$$

となることがわかる。

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) \tag{10}$$
$$\det(A^\dagger) = \det(A)^* \tag{11}$$

より、

$$|\det(A)| = 1 \tag{12}$$

となることがわかる。

$GL(N,\boldsymbol{C})$ に対して N 個の拘束条件が入ったものが $U(N,\boldsymbol{C})$ であるため、実多様体としての次元は、

$$\dim_{\boldsymbol{R}}(U(N,\boldsymbol{C})) = N^2 \tag{13}$$

となる。

■$SU(N,\boldsymbol{C})$

特殊ユニタリ群 $SU(N,\boldsymbol{C})$ は行列式が 1 となる $U(N)$ の部分群である。すなわち、

$$SU(N,\boldsymbol{C}) = \{A \in U(N,\boldsymbol{C}) | \det(A) = 1\} \tag{14}$$

で定義される。

$U(N,\boldsymbol{C})$ に対して 1 個の拘束条件が入ったものが $SU(N,\boldsymbol{C})$ であるため、実多様体としての次元は、

$$\dim_{\boldsymbol{R}}(U(N,\boldsymbol{C})) = N^2 - 1 \tag{15}$$

となる。

■コメント

このノートでは行列によってリー群を定義したが、そ

れらのリー群に同型な群も同じ記号で書くことにする。$U(N,\boldsymbol{C}), SU(N,\boldsymbol{C})$ は $U(N), SU(N)$ と書かれることが多い。以下、そのように書く。また、以下 $N=2$ とする。

2　$SU(2)$ 群

2.1　実多様体として S^3 であること

前章の行列による定義から $SU(2)$ 群は

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \quad (a, b \in \boldsymbol{C}) \tag{16}$$

という形の行列のうち

$$|a|^2 + |b|^2 = 1 \tag{17}$$

となるものからなる線形代数群であることがわかる。

実多様体としては 3 次元である。とくに、

$$\mathrm{Re}(a)^2 + \mathrm{Re}(b)^2 + \mathrm{Im}(a)^2 + \mathrm{Im}(b)^2 = 1 \tag{18}$$

となることから、四次元空間中の単位超球面

$$S^3 = \{(x, y, z, w) \in \boldsymbol{R}^4 | x^2 + y^2 + z^2 + w^2\}$$

と同相であることがわかる。

2.2　オイラー角を用いた表示

オイラー角を用いて

$$\begin{aligned}u(\phi,\theta,\psi) &= \begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}e^{i(\phi+\psi)/2} & i\sin\frac{\theta}{2}e^{i(\phi-\psi)/2}\\ i\sin\frac{\theta}{2}e^{-i(\phi-\psi)/2} & \cos\frac{\theta}{2}e^{-i(\phi+\psi)/2}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}e^{i\phi/2} & 0\\ 0 & e^{-i\phi/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2} & i\sin\frac{\theta}{2}\\ i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{i\psi/2} & 0\\ 0 & e^{-i\psi/2}\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{19}$$

のように $SU(2)$ の元を表示することが出来る。ここで、

$$0 \leq \phi < 2\pi,\ 0 \leq \theta < \pi,\ -2\pi \leq \psi < 2\pi$$

である。この表示により、$ab \neq 0$ である元については一意に表示することが可能である。

先の a, b との関係は、

$$a = \cos\frac{\theta}{2}e^{i(\phi+\psi)/2}$$
$$b = i\sin\frac{\theta}{2}e^{i(\phi-\psi)/2}$$

より、

$$\cos\theta = 2aa^* - 1 \tag{20}$$

$$e^{i\phi} = -\frac{iab}{|a||b|} \tag{21}$$

$$e^{i\psi} = i\frac{a}{b}\frac{|b|}{|a|} \tag{22}$$

などとなる。

2.3　オイラー角を用いた測度

$$
\begin{aligned}
&\int_{\boldsymbol{C}^2} dadb\ \delta(aa^* + bb^* - 1) \\
&= \int_{\boldsymbol{R}^4} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4\ \delta(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 1) \\
&= \int_{S^3} d\Omega \\
&= 2\pi^2
\end{aligned}
\tag{23}
$$

となっている。ただし、

$$
da = d\mathrm{Re}(a) d\mathrm{Im}(a), db = d\mathrm{Re}(b) d\mathrm{Im}(b)
$$

である。

変数変換、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}(a) &= r\cos\frac{\theta}{2}\cos\left(\frac{\phi+\psi}{2}\right) \\
\mathrm{Im}(a) &= r\cos\frac{\theta}{2}\sin\left(\frac{\phi+\psi}{2}\right) \\
\mathrm{Re}(b) &= -r\sin\frac{\theta}{2}\sin\left(\frac{\phi-\psi}{2}\right) \\
\mathrm{Im}(b) &= r\sin\frac{\theta}{2}\cos\left(\frac{\phi-\psi}{2}\right)
\end{aligned}
\tag{24}
$$

を用いると、

$$
\begin{aligned}
&\int_{\boldsymbol{C}^2} dadb\ \delta(aa^* + bb^* - 1) \\
&= \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\theta \int_{-2\pi}^{2\pi} d\psi \int_0^{2\pi} d\phi\ J(a,b;r,\phi,\theta,\psi)\delta(r-1) \\
&= \int_0^\pi d\theta \int_{-2\pi}^{2\pi} d\psi \int_0^{2\pi} d\phi\ J(a,b;r=1,\phi,\theta,\psi)
\end{aligned}
\tag{25}
$$

ここでヤコビアンは

$$
\begin{aligned}
&J(a,b;r=1,\phi,\theta,\psi) \\
&= \left|\begin{matrix}
\frac{d\mathrm{Re}(a)}{dr} & \frac{d\mathrm{Im}(a)}{dr} & \frac{d\mathrm{Re}(b)}{dr} & \frac{d\mathrm{Im}(b)}{dr} \\
\frac{d\mathrm{Re}(a)}{d\phi} & \frac{d\mathrm{Im}(a)}{d\phi} & \frac{d\mathrm{Re}(b)}{d\phi} & \frac{d\mathrm{Im}(b)}{d\phi} \\
\frac{d\mathrm{Re}(a)}{d\theta} & \frac{d\mathrm{Im}(a)}{d\theta} & \frac{d\mathrm{Re}(b)}{d\theta} & \frac{d\mathrm{Im}(b)}{d\theta} \\
\frac{d\mathrm{Re}(a)}{d\psi} & \frac{d\mathrm{Im}(a)}{d\psi} & \frac{d\mathrm{Re}(b)}{d\psi} & \frac{d\mathrm{Im}(b)}{d\psi}
\end{matrix}\right|_{r=1} \\
&= \frac{1}{8}\sin\theta
\end{aligned}
$$

となっている。すなわち、

$$
d\Omega = \frac{1}{8}\sin\theta d\phi d\theta d\psi \tag{26}
$$

の関係にある。

3　$su(2)$ 代数

$su(2)$ 代数は $SU(2)$ 群の単位元における接ベクトル空間にリーブラケット演算を組み込んだものである。すなわち、$su(2)$ 代数は実ベクトル空間としては $\boldsymbol{R}^3$ であり、リーブラケット演算 $[,]$ は u, v を $su(2)$ 代数の元として交換子積 $[u, v] = uv - vu$ で与えられる。

$su(2)$ 代数の基底は $SU(2)$ 群の独立な 3 つの一変数部分群から構成することが可能である。独立な 3 つの一変数部分群として、

$$\omega_1(t) = u(0, t, 0) = \begin{pmatrix} \cos\frac{t}{2} & i\sin\frac{t}{2} \\ i\sin\frac{t}{2} & \cos\frac{t}{2} \end{pmatrix} \tag{27}$$

$$\omega_2(t) = u(\pi, t, -\pi) = \begin{pmatrix} \cos\frac{t}{2} & -\sin\frac{t}{2} \\ \sin\frac{t}{2} & \cos\frac{t}{2} \end{pmatrix} \tag{28}$$

$$\omega_3(t) = u(t, 0, 0) = \begin{pmatrix} e^{\frac{it}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{it}{2}} \end{pmatrix} \tag{29}$$

を選択する。ここで、

$$\omega_1(0) = \omega_2(0) = \omega_3(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となっている。

　このとき各群の 単位元 におけるそれぞれの微分

$$l_1 := \frac{d\omega_1}{dt}(0) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & 0 \end{pmatrix} \tag{30}$$

$$l_2 := \frac{d\omega_2}{dt}(0) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \tag{31}$$

$$l_3 := \frac{d\omega_3}{dt}(0) = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{i}{2} \end{pmatrix} \tag{32}$$

は $su(2)$ 代数の基底となっている。

　このとき基底間のブラケット演算は

$$[l_i, l_j] = l_i l_j - l_j l_i = \epsilon_{ijk} l_k \tag{33}$$

となる。