$SU(2)$ 群と $su(2)$ 代数の表現論（その２）

〜有限次元既約ユニタリ表現とウィグナーの D 行列〜

adhara*

2016 年 12 月 18 日

このノートでは $SU(2)$ 群の有限次元既約ユニタリ表現を紹介する。そしてその行列表示である「ウィグナーの D 行列」を紹介する。

ノートの構成は以下のようになっている。まず、ある多項式を元とする線形空間への作用が $SU(2)$ 群の有限次元表現を成すことを示す。そして、これらがユニタリ既約表現であることを示す。ウィグナーの D 行列は $SU(2)$ 群の各要素に対して定まるものであるが、これについて書き下す。

* Twitter @adhara_mathphys

1　$SU(2)$ 群の有限次元既約ユニタリ表現の構築

1.1　複素二変数関数の集合への作用

群 $GL(2,\boldsymbol{C})(\supset SU(2))$ の複素二変数関数の集合 $\mathcal{F}$ への作用を考える。

すなわち、

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2,\boldsymbol{C}) \tag{1}$$

として、$f \in \mathcal{F}$ に対して

$$g\left[f\right](z_1, z_2) = f(az_1 + cz_2, bz_1 + dz_2) \tag{2}$$

のように作用するものとする。行列の作用を陽に書くと、

$$\begin{pmatrix} az_1 + cz_2 & bz_1 + dz_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{3}$$

となっており、$g, h \in GL(2,\boldsymbol{C})$ とすると、

$$(gh)[f] = g[h[f]] \tag{4}$$

となっており、群の左作用となっていることが分かる。この作用は変数に対する一次分数変換を行っているのである。

1.2　複素二変数斉次多項式空間に対する表現

表現を考えるためには作用する対象はただの集合ではなく、線形空間（ベクトル空間）である必要がある。したがって上記の作用する部分集合でベクトル空間となっているものを考えることとしたい。

ここでは、作用する対象を $\mathcal{F}$ の部分集合である複素係数二変数 $2l$ 次斉次多項式の集合

$$\mathcal{F}_l = \left\{ f(z_1, z_2) \middle| \sum_{n=-l}^{l} a_n z_1^{l-n} z_2^{l+n} \quad (a_n \in \boldsymbol{C}) \right\} \tag{5}$$

とする。ただし $l \geq 0$ は整数または半整数とし、n は $l-n$ や $l+n$ が整数になるように動くものとする。$\mathcal{F}_l$ は $2l+1$ 次元複素ベクトル空間と見なせる。この限定した作用は単なる作用ではなく表現となる。すなわち $2l+1$ 次元複素ベクトル空間への表現となっている。

今導入した $2l+1$ 次元（複素）ベクトル空間への表現のことを

$$(T_l, \mathcal{F}_l) \tag{6}$$

と書く。T_l の定義域を $SU(2)$ に限定すれば、それは $SU(2)$ の表現である。

■一変数化

上で導入した表現と等価な表現を一変数の多項式への作用から作ることも可能である。すなわち、

$$F(z) := f(z, 1) \tag{7}$$

を導入すると、

$$f(z_1, z_2) = z_2^{2l} f\left(\frac{z_1}{z_2}, 1\right) = z_2^{2l} F\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \tag{8}$$

と書くことが出来る。

関数 F に対する g の作用は

$$\begin{aligned} [T_l(g)F](z) &= [T_l(g)f](z, 1) \\ &= f(az + c, bz + d) \\ &= (bz + d)^{2l} F\left(\frac{az + c}{bz + d}\right) \end{aligned} \tag{9}$$

によって与えられる。

$\mathcal{F}_l$ を一変数化したときの対応する関数空間を $\tilde{\mathcal{F}}_l$ と書くことにする。対応する表現を $(T_l, \tilde{\mathcal{F}}_l)$ と書く。これは $(T_l, \mathcal{F}_l)$ と等価な表現である。

1.3 ユニタリ性を満たす $SU(2)$ 表現の構築

まず、コンパクト群に関する強力な定理についてコメントする必要がある。すなわち、

定理 1. コンパクト群 G の表現 (π, V) が連続な有限次元表現であれば、この表現はユニタリ表現である。

群 $SU(2)$ はコンパクトであり $(T_l, \mathcal{F}_l)$ は有限次元だからこの時点でユニタリ表現なのである。（本定理については別のノートで証明する。）すでにユニタリ表現は構築されてしまっていると言えるので、この節で行うことはユニタリ性を満たす内積を導入することである。

1.3.1　オイラー角を用いた表示

内積の導入前にオイラー角を用いた $SU(2)$ の元の表示（別のノートでも示している）をおさらいする。

すなわち、

$$\begin{aligned} u(\phi,\theta,\psi) &= \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}e^{i(\phi+\psi)/2} & i\sin\frac{\theta}{2}e^{i(\phi-\psi)/2} \\ i\sin\frac{\theta}{2}e^{-i(\phi-\psi)/2} & \cos\frac{\theta}{2}e^{-i(\phi+\psi)/2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & i\sin\frac{\theta}{2} \\ i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi/2} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{10}$$

のように $SU(2)$ の元を表示することが出来る。ここで、

$$0 \leq \phi < 2\pi,\ 0 \leq \theta < \pi,\ -2\pi \leq \psi < 2\pi$$

である。この表示は行列要素に 0 が出てこない元については一意に表示することが可能である。三変数で表されることは

$SU(2)$ が実多様体として三次元であることを示唆している。

ここで三個の独立な一変数部分群を導入する。

$$\omega_1(t) = u(0,t,0) = \begin{pmatrix} \cos\frac{t}{2} & i\sin\frac{t}{2} \\ i\sin\frac{t}{2} & \cos\frac{t}{2} \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$\omega_2(t) = u(\pi,t,-\pi) = \begin{pmatrix} \cos\frac{t}{2} & -\sin\frac{t}{2} \\ \sin\frac{t}{2} & \cos\frac{t}{2} \end{pmatrix} \tag{12}$$

$$\omega_3(t) = u(t,0,0) = \begin{pmatrix} e^{\frac{it}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{it}{2}} \end{pmatrix} \tag{13}$$

これを用いると、

$$u(\phi,\theta,\psi) = \omega_3(\phi)\omega_1(\theta)\omega_3(\psi) \tag{14}$$

となり二つの部分群だけから $SU(2)$ の元を生成可能であることが分かる。

1.3.2 リー代数 $su(2)$

$SU(2)$ の単位元における接ベクトル空間から、$su(2)$ 代数を構成することが出来る。$su(2)$ 代数は三次元ベクトル空間であるが、その基底を $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ から構成することが出来る。これらを A_1, A_2, A_3 とすると複素一変数関数 F への作用は $SU(2)$ の元の複素一変数関数への作用から定めることが出来

る。すなわち、

$$
\begin{aligned}
\left[A_1F\right](x) &:= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left[T_l(\omega_1(\Delta t))F\right](x) - F(x)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left(\frac{ix\Delta t}{2} + 1\right)^{2l} F\left(\left(x + \frac{i\Delta t}{2}\right)\left(1 - \frac{ix\Delta t}{2}\right)\right) - F(t)}{\Delta t} \\
&= ilxF(x) + \left(\frac{i}{2} - \frac{ix^2}{2}\right)\frac{dF}{dx}(x) && (15) \\
\left[A_2F\right](x) &:= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left[T_l(\omega_2(\Delta t))F\right](x) - F(x)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left(-\frac{x\Delta t}{2} + 1\right)^{2l} F\left(\left(x + \frac{\Delta t}{2}\right)\left(1 + \frac{x\Delta t}{2}\right)\right) - F(t)}{\Delta t} \\
&= -lxF(x) + \left(\frac{1}{2} + \frac{x^2}{2}\right)\frac{dF}{dx}(x) && (16) \\
\left[A_3F\right](x) &:= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left[T_l(\omega_3(\Delta t))F\right](x) - F(x)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left(-\frac{i\Delta t}{2} + 1\right)^{2l} F\left(\left(x + \frac{ix\Delta t}{2}\right)\left(1 + \frac{i\Delta t}{2}\right)\right) - F(t)}{\Delta t} \\
&= -ilF(x) + ix\frac{dF}{dx}(x) && (17)
\end{aligned}
$$

より、

$$A_1 = ilx + \frac{i}{2}(1 - x^2)\frac{d}{dx} \tag{18}$$

$$A_2 = -lx + \frac{1}{2}(1 + x^2)\frac{d}{dx} \tag{19}$$

$$A_3 = -il + ix\frac{d}{dx} \tag{20}$$

のように一階微分を含む演算子となる。

ここで、

$$[A_1, A_2] = A_3 \tag{21}$$
$$[A_i, A_j] = \sum_k \epsilon_{ijk} A_k \tag{22}$$
$$\tag{23}$$

といった交換関係が成立していることがわかる。

また、

$$H_i = iA_i \quad (i = 1, 2, 3) \tag{24}$$

とする。このとき

$$H_+ = H_1 + iH_2 = -\frac{d}{dx} \tag{25}$$
$$H_- = H_1 - iH_2 = -2lx + x^2 \frac{d}{dx} \tag{26}$$

や

$$H_1 = -lx - \frac{1}{2}(1 - x^2)\frac{d}{dx} \tag{27}$$
$$H_2 = -ilx + \frac{i}{2}(1 + x^2)\frac{d}{dx} \tag{28}$$
$$H_3 = l - x\frac{d}{dx} \tag{29}$$

や

$$\boldsymbol{H}^2 := H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 \tag{30}$$
$$= \frac{1}{2}(H_+H_- + H_-H_+) + H_3^2$$
$$= l(2l+1) \tag{31}$$

$$H_3 x^{l-n} = n x^{l-n} \tag{32}$$
$$H_+ x^{l-n} = (n-l) x^{l-n-1} \tag{33}$$
$$H_- x^{l-n} = (-l-n) x^{l-n+1} \tag{34}$$

$$H_- x^{2l} = 0 \tag{35}$$
$$H_+ 1 = 0 \tag{36}$$

といったものが成立する。

1.3.3 ユニタリ性を満たす内積の構築

これだけの準備をして、ユニタリ表現となるような内積の構築を行う。すなわち、

$$\forall g \in SU(2), \forall \psi_1, \psi_2 \in \tilde{\mathcal{F}}_l : (\psi_1, \psi_2) = (T_l(g)\psi_1, T_l(g)\psi_2) \tag{37}$$

が成立するように内積 $(,)$ を定める。

まず $\psi_1(x) = x^{l-k}, \psi_2(x) = x^{l-km}, g = \omega_3(t)$ とすると

$$(x^{l-k}, x^{l-m}) = (T_l(\omega_3(t)) x^{l-k}, T_l(\omega_3(t)) x^{l-m}) \tag{38}$$

の成立が必要である。ここで、

$$\begin{aligned} T_l(\omega_3(t))x^{l-k} &= \left(e^{-\frac{it}{2}}\right)^{2l}\left(e^{it}x\right)^{l-k} \\ &= e^{-ikt}x^{l-k} \end{aligned} \tag{39}$$

を用いると、

$$\begin{aligned} (x^{l-k}, x^{l-m}) &= (e^{-ikt}x^{l-k}, e^{-imt}x^{l-m}) \\ &= e^{-i(k-m)t}(x^{l-k}, x^{l-m}) \end{aligned}$$

となって、

$$(1 - e^{-i(k-m)t})(x^{l-k}, x^{l-m}) = 0 \tag{40}$$

が成立する。$k \neq m$ のときは、

$$(x^{l-k}, x^{l-m}) = 0 \tag{41}$$

となり、直交していることが分かる。

次に条件 37 を用いて、

$$(x^{l-k}, x^{l-k}) \tag{42}$$

の値を定める。ここで $\psi_1 = x^{l-k}(t), \psi_2 = x^{l-k+1}, g = \omega_2(t)$ とすると、直交性より

$$0 = (x^{l-k}, x^{l-k+1}) = (T_l(\omega_2(t))x^{l-k}, T_l(\omega_2(t))x^{l-k+1}) \tag{43}$$

が成立する。両辺 t で微分して、$t=0$ とすると、$\frac{dT_l(\omega_2(t))}{dt}|_t = A_2$ より、

$$
\begin{aligned}
0 &= (A_2 x^{l-k}, x^{l-k+1}) + (x^{l-k}, A_2 x^{l-k+1}) \\
&= \left(-l x^{l-k+1} + \frac{1}{2}(x^{l-k-1} + x^{l-k+1})(l-k), x^{l-k+1}\right) \\
&+ \left(x^{l-k}, -l x^{l-k+2} + \frac{1}{2}(x^{l-k} + x^{l-k+2})(l-k+1)\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}(l-k) - l\right)(x^{l-k+1}, x^{l-k+1}) \\
&+ \frac{1}{2}(l-k+1)(x^{l-k}, x^{l-k})
\end{aligned} \tag{44}
$$

が成立する。したがって、

$$
\begin{aligned}
0 &= (-l-k)(x^{l-k+1}, x^{l-k+1}) + (l-k+1)(x^{l-k}, x^{l-k}) \\
0 &= (-l-k-1)(x^{l-k}, x^{l-k}) + (l-k)(x^{l-k-1}, x^{l-k-1})
\end{aligned}
$$

などとなる。ここで、

$$
(1,1) = (2l)! \tag{45}
$$

とすると（線形性よりこれを定める自由度は残されていた!）

$$\begin{aligned}(x^{l-k}, x^{l-k}) &= \frac{l-k}{l+k+1}(x^{l-k+1}, x^{l-k+1}) \\ &= \cdots \\ &= \frac{(l-k)(l-k-1)\cdots(l-(l-1))}{(l+k+1)(l+k+2)\cdots(l+l)}(1,1) \\ &= \frac{(l-k)!}{(2l)!/(l+k)!}(2l)! \\ &= (l-k)!(l+k)! \end{aligned} \tag{46}$$

となる。したがって、

$$\psi_k(x) = \frac{x^{l-k}}{\sqrt{(l-k)!(l+k)!}} \tag{47}$$

とすると、

$$\langle \psi_k, \psi_m \rangle = \delta_{km} \tag{48}$$

となり、$(\psi_k | -l \leq k \leq l)$ は正規直交基底を成す。

以上より、条件 37 を満たす内積 $(,)$ は

$$(\psi_k, \psi_l) = 1 \tag{49}$$

を満たす必要がある。（$(1,1)$ を何にするかの自由度だけは残されているが。）

この内積が本当にユニタリ条件 37 を満たしているかどうかについては、群の表現から定まる一次変換を上記の基底に

よって行列表示したときに（この行列表示がウィグナーの D 行列にほかならない）これがユニタリ行列となっているかどうかで判定される。これについては次章のウィグナー D 行列に関する章に回す。

1.3.4　内積の正体

上で導入した内積 (,) の正体は、微分内積とよばれるものである。すなわち、$P(x_1, x_2), Q(x_1, x_2) \in \mathcal{F}_l$ に対して、微分内積、

$$\langle P, Q \rangle := P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)(Q(x_1, x_2))^* \tag{50}$$

を定義する。このとき、$p(x) = P(x, 1), q(x) = Q(x, 1)$ とすると前に $p, q \in \tilde{\mathcal{F}}_l$ であり、このベクトル空間に導入された内積 (,) に対して、

$$(p, q) = \langle P, Q \rangle \tag{51}$$

の関係が成立していることが分かる。

1.4　既約表現であることの証明

群の表現論において次の事実（補題）が成立する。（証明は他のノートで示す。）

事実 2. 群 G の有限次元ユニタリ表現は完全可約である。

事実 3. （Schur の補題とその逆）群 G の完全可約の表現 (π, V) を考える。以下の項目は同値である。

1. π は既約表現である。
2. 任意の $g \in G$ に対して $\pi(g)$ と可換となる $\mathrm{End}(V)$ の元はスカラー写像に限られる。

定理 1 と二つの事実を用いて次を証明する。

命題 4. $SU(2)$ の表現 $(T_l, \tilde{\mathcal{F}}_l)$ は既約表現である。

証明. まず、定理 1 と事実 2 より、$(T_l, \tilde{\mathcal{F}}_l)$ は完全可約である。さらに、$SU(2)$ の生成元は $\omega_1(t), \omega_3(t)$ の二つの部分群なので、これらの表現 $T_l(\omega_1(t)), T_l(\omega_3(t))$ と可換となる $\mathrm{End}(\tilde{\mathcal{F}}_l)$ の元がスカラー写像に限られることを示せば、事実 3 より既約表現であることが示せる。

まず部分群 $\{\omega_3(t) | t \in [0, 2\pi)\} \subset G$ の要素は $a \in \boldsymbol{C}, |a| = 1$ として、

$$\tilde{\omega}_3(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$$

と書くことが出来る。すると $f \in \tilde{\mathcal{F}}_l$ に対する $\tilde{\omega}_3(a)$ の作用は、

$$[T_l(\tilde{\omega}_3(a))f](z) = a^{-2l} f(a^2 z)$$

となる。ここで任意の $f \in \tilde{\mathcal{F}}_l$ に対して、

$$[P_a f](z) = f(a^2 z)$$

を満たす $P_a \in \mathrm{End}(\tilde{\mathcal{F}}_l)$ を考えると、

$$[T_l(\tilde{\omega}_3(a))f](z) = a^{-2l} P_a f(z)$$

となる。すなわち、

$$T_l(\tilde{\omega}_3(a)) = a^{-2l} P_a$$

である。したがってすべての $T_l(\omega_3(t))$ と可換となる $A \in \mathrm{End}(\tilde{\mathcal{F}}_l)$ を取ってくると、

$$AP_a = P_a A \ , \forall a(\in \boldsymbol{C}, |a| = 1)$$

が成立しなくてはならない。両一次変換を $z^k (0 \leq k \leq 2l)$ に作用させると、

$$a^{2k} A z^k = P_a (A z_k)$$

となるが、$f \in \mathrm{End}(\tilde{\mathcal{F}}_l)$ に対して

$$\forall a(\in \boldsymbol{C}, |a| = 1) P_a f = a^{2k} f \iff f = c_k z^k \ (c_k \text{は定数})$$

が成立するから、

$$A z^k = c_k z^k$$

である。したがって、A を基底 $\{1, z, \cdots, z^{2l}\}$ によって行列表示すると、対角行列であることが分かる。

上記の A に対してさらにすべての $T_l(\omega_1(t))$ との可換性を課す。ここで、

$$
\begin{aligned}
AT_l(\omega_1(t))z^{2l} &= A\left(\cos\frac{t}{2}z + i\sin\frac{t}{2}\right)^{2l} \\
&= \sum_{k=0}^{2l} {}_{2l}C_k \left(\cos\frac{t}{2}\right)^k \left(\sin\frac{t}{2}\right)^{2l-k} Az^k \\
&= \sum_{k=0}^{2l} c_k \cdot {}_{2l}C_k \left(\cos\frac{t}{2}\right)^k \left(\sin\frac{t}{2}\right)^{2l-k} z^k
\end{aligned}
$$

および、

$$
\begin{aligned}
T_l(\omega_1(t))Az^{2l} &= c_{2l}T_l(\omega_1(t))z^{2l} \\
&= c_{2l}\sum_{k=0}^{2l} {}_{2l}C_k \left(\cos\frac{t}{2}\right)^k \left(\sin\frac{t}{2}\right)^{2l-k} z^k
\end{aligned}
$$

だから、可換性は

$$
c_0 = c_1 = c_2 = \cdots = c_{2l}
$$

を意味する。すなわち、A はスカラー写像である。

以上より $(T_l, \mathrm{End}(\tilde{\mathcal{F}}_l))$ 既約表現となる。 $\square$

2　ウィグナーの D 行列

記号については前章のものを引き継ぐ。

まず、

$$t^l_{mn}(g) = (T_l(g)\psi_n, \psi_m) \tag{52}$$

とする。$\{\psi_n\}$ が正規直交基底であることより

$$T_l(g)\psi_n = \sum_{m=-l}^{l} t^l_{mn}(g)\psi_m \tag{53}$$

となる。t^l は $2l+1$ 次元複素ベクトル空間 $\tilde{\mathcal{F}}_l$ における一次変換行列の役割をしていることがわかる。これをウィグナーの D 行列と呼ぶ。D と呼ぶのはウィグナーが行列を表す記号として D を使っていたからである。

D 行列を実際に書き下す。(実は $SU(2)$ の元に限らず一般の $GL(2,\boldsymbol{C})$ について定めることが出来る。)

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SU(2) \tag{54}$$

とすると定義より、

$$
\begin{aligned}
t^l_{mn}(g) &= (T_l(g)\psi_n, \psi_m) \\
&= \frac{(T_l(g)x^{l-n}, x^{l-m})}{\sqrt{(l-m)!(l+m)!(l-n)!(l+n)!}} \\
&= \frac{((ax+c)^{l-n}(bx+d)^{l+n}, x^{l-m})}{\sqrt{(l-m)!(l+m)!(l-n)!(l+n)!}}
\end{aligned}
\tag{55}
$$

であることが分かる。ここで、

$$
\begin{aligned}
&(ax+c)^{l-n}(bx+d)^{l+n} \\
&= \sum_{i=0}^{l-n}\sum_{j=0}^{l+n} {}_{l-n}C_i \cdot {}_{l+n}C_j \cdot (ax)^i c^{l-n-i}(bx)^j d^{l+n-j}
\end{aligned}
$$

でありこのうち、x^{l-m} の項は $i+j=l-m$ の項だけを考えると、

$$
\begin{aligned}
&(ax+c)^{l-n}(bx+d)^{l+n} \\
&= \sum_{i=\max(0,-m-n)}^{l-\max(m,n)} {}_{l-n}C_i \cdot {}_{l+n}C_{l-m-i} \cdot a^i c^{l-n-i} b^{l-m-i} d^{m+n+i} \\
&= (l-n)!(l+n)! \\
&\times \sum_{i=\max(0,-m-n)}^{l-\max(m,n)} \frac{a^i}{i!}\frac{c^{l-n-i}}{(l-n-i)!}\frac{b^{l-m-i}}{(l-m-i)!}\frac{d^{m+n+i}}{(m+n+i)!}
\end{aligned}
\tag{56}
$$

である。

以上より、

$$t^l_{mn}(g) = \sqrt{(l-m)!(l+m)!(l-n)!(l+n)!} \times \sum_{i=\max(0,-m-n)}^{l-\max(m,n)} \frac{a^i}{i!} \frac{c^{l-n-i}}{(l-n-i)!} \frac{b^{l-m-i}}{(l-m-i)!} \frac{d^{m+n+i}}{(m+n+i)!} \tag{57}$$

となる。

2.1　D 行列がユニタリでありこと

D 行列 がユニタリ行列であれば今定めたような内積はユニタリ条件 37 を満たす。

$g \in SU(2)$ のとき、

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \tag{58}$$

$$|a|^2 + |b|^2 = 1 \quad (a, b \in \boldsymbol{C}) \tag{59}$$

とおくことができる。このとき、

$$t^l_{mn}(g) = \sqrt{(l-m)!(l+m)!(l-n)!(l+n)!} \times \sum_{i=\max(0,-m-n)}^{l-\max(m,n)} \frac{a^i}{i!} \frac{(-b^*)^{l-n-i}}{(l-n-i)!} \frac{b^{l-m-i}}{(l-m-i)!} \frac{(a^*)^{m+n+i}}{(m+n+i)!} \tag{60}$$

であるが、

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} a^* & -b \\ b^* & a \end{pmatrix} \tag{61}$$

より、

$$\begin{aligned} &t^l_{mn}(g^{-1}) \\ &= \sqrt{(l-m)!(l+m)!(l-n)!(l+n)!} \\ &\times \sum_{i=\max(0,-m-n)}^{l-\max(m,n)} \frac{(a^*)^i}{i!} \frac{(b^*)^{l-n-i}}{(l-n-i)!} \frac{(-b)^{l-m-i}}{(l-m-i)!} \frac{a^{m+n+i}}{(m+n+i)!} \end{aligned} \tag{62}$$

となる。

一方、

$$\begin{aligned} &t^l_{nm}(g)^* \\ &= \sqrt{(l-m)!(l+m)!(l-n)!(l+n)!} \\ &\times \sum_{i=\max(0,-m-n)}^{l-\max(m,n)} \frac{(a^*)^i}{i!} \frac{(-b)^{l-m-i}}{(l-m-i)!} \frac{(b^*)^{l-n-i}}{(l-n-i)!} \frac{(a)^{m+n+i}}{(m+n+i)!} \end{aligned} \tag{63}$$

である。

したがって、

$$t^l_{mn}(g^{-1}) = t^l_{nm}(g)^* \tag{64}$$

が成立し、D 行列がユニタリ行列であることが示せた。