Sphero-conal（sphero-elliptic）座標と一般化 Lamé 方程式

高次元球面上の幾何，変数分離，分割差分

adhara_mathphys

2026 年 6 月 30 日

概要

$\mathbb{R}^{n+1}$ の単位球面 S^n に sphero-conal（spheroconal, sphero-conical, sphero-elliptic）座標を導入し，球面 Laplace–Beltrami 固有値方程式を変数分離する．座標変換を表す有理関数恒等式から計量と Laplace–Beltrami 作用素を導出し，積型解に対する分離条件を得る．その分離条件は「最高次分割差分が定数」という機能方程式であり，Lagrange 補間によって全ての一変数因子が同一の次数 $n-1$ 以下の分離多項式を含む Fuchs 型方程式に従うことが分かる．さらに，有限特異点の局所指数，アクセサリパラメータ，多項式解と Lamé 準多項式の違い，$n=1,2$ の低次元例を整理する．なお，本ノートの基本的なアイデアと数式上の骨格は adhara_mathphys が用意したものであり，本文の構成，記法の整理，および LaTeX 原稿としての整形には生成 AI を補助的に用いた．最終的な内容の確認と責任は adhara_mathphys に属する．

目次

1 導入

三次元の sphero-conal 座標では，球面上の座標曲線は互いに直交する楕円錐と球面との交線である．この座標で球面調和関数を変数分離すると Lamé 方程式が現れる．本稿ではこの構成を $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ に拡張し，次の三点を明確にする．

1. 座標変換から計量と Δ_{S^n} をどのように得るか．
2. 分離定数がなぜ一つの次数 $n-1$ 以下の多項式に統合されるか．
3. 多項式解だけでなく，平方根因子をもつ Lamé 準多項式がなぜ必要か．

文献 [1] は任意次元の sphero-conal 座標を扱い，さらに Laplace 方程式を Dunkl 方程式へ拡張している．本稿はそのうち通常の Laplace 方程式に対応する部分を自足的に整理する．したがって，本稿でいう「一般化 Lamé 方程式」は主として高次元化された分離方程式を指し，文献 [1] の “generalized” が指す Dunkl パラメータによる一般化とは区別する．

2 球面調和関数

$n \geq 1$ とし，

$$S^n = \{u = (u_1, \dots, u_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |u| = 1\}$$

とする．$x = ru$（$r > 0$, $u \in S^n$）により

$$\Delta_{\mathbb{R}^{n+1}} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_{S^n} \tag{1}$$

である．$G(r,u) = R(r)F(u)$ を $\Delta_{\mathbb{R}^{n+1}} G = 0$ に代入すると

$$(\Delta_{S^n} + \lambda) F = 0, \tag{2}$$

$$R'' + \frac{n}{r}R' - \frac{\lambda}{r^2}R = 0 \tag{3}$$

を得る．

$-\Delta_{S^n}$ の固有値は

$$\lambda_l = l(l+n-1), \qquad l \in \mathbb{N}_0 \tag{4}$$

であり，対応する固有関数を次数 l の球面調和関数という．次数 l の斉次調和多項式 H_l は $H_l(ru) = r^l H_l(u)$ と書け，その球面への制限が (4) の固有関数になる [2, 第 6–7 章]．逆に球面調和関数は斉次調和多項式へ延長できる．

注意 2.1. $l \in \mathbb{N}_0$ という条件は単なる「一価性」からではなく，コンパクト多様体 S^n 上の楕円型自己共役作用素 $-\Delta_{S^n}$ のスペクトルから生じる．

3 Sphero-conal 座標の定義と幾何

実数

$$e_1 > e_2 > \cdots > e_{n+1} \tag{5}$$

を固定し，

$$e_i > \rho_i > e_{i+1}, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{6}$$

とする．符号 $\varepsilon_a \in \{-1, 1\}$ を固定した開象限内で

$$u_a = \varepsilon_a \sqrt{\frac{\prod_{i=1}^{n} (\rho_i - e_a)}{\prod_{\substack{b=1 \\ b \neq a}}^{n+1} (e_b - e_a)}}, \qquad a = 1, \ldots, n+1 \tag{7}$$

と定める．

3.1 基本有理関数恒等式

命題 3.1. (7) で定めた u_a に対して

$$\sum_{a=1}^{n+1} \frac{u_a^2}{t - e_a} = \frac{\prod_{i=1}^{n} (t - \rho_i)}{\prod_{a=1}^{n+1} (t - e_a)} \tag{8}$$

が成り立つ．

Proof. 右辺を部分分数分解する．$t = e_a$ における留数は

$$\frac{\prod_i (e_a - \rho_i)}{\prod_{b \neq a} (e_a - e_b)} = \frac{\prod_i (\rho_i - e_a)}{\prod_{b \neq a} (e_b - e_a)} = u_a^2$$

である．両辺はともに $t \to \infty$ で $t^{-1} + O(t^{-2})$ となるため一致する． □

$t \to \infty$ で t^{-1} の係数を比較すると

$$\sum_{a=1}^{n+1} u_a^2 = 1 \tag{9}$$

が従う．また $t = \rho_i$ とおけば

$$\sum_{a=1}^{n+1} \frac{u_a^2}{\rho_i - e_a} = 0, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{10}$$

を得る．ρ_i を固定した式は原点を頂点とする二次錐面であり，その球面との交わりが座標曲面である．

注意 3.2. $\rho_i = e_i$ または e_{i+1} ではいずれかの u_a が零となり，座標は退化する．したがって以下の微分計算は (6) の内部で行う．球面全体は異なる符号 ε_a の座標領域を貼り合わせて覆う．

4　計量と Laplace–Beltrami 作用素

次の多項式を置く：

$$A(t) := \prod_{a=1}^{n+1}(t-e_a), \qquad V_i := \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(\rho_i-\rho_j). \tag{11}$$

符号を固定した座標領域では

$$\frac{\partial u_a}{\partial \rho_i} = \frac{u_a}{2(\rho_i-e_a)}. \tag{12}$$

したがって誘導計量 $g_{ij} = \sum_a (\partial_i u_a)(\partial_j u_a)$ は次で与えられる．

命題 4.1. *Sphero-conal* 座標は直交座標であり，

$$g_{ij} = 0 \quad (i\neq j), \qquad g_{ii} = -\frac{1}{4}\frac{V_i}{A(\rho_i)}. \tag{13}$$

(6) のもとで右辺は正である．

Proof. $R(t) := \sum_a u_a^2/(t-e_a)$ と置く．$i \neq j$ なら

$$4g_{ij} = \sum_a \frac{u_a^2}{(\rho_i-e_a)(\rho_j-e_a)} = \frac{R(\rho_i)-R(\rho_j)}{\rho_j-\rho_i} = 0$$

である．また

$$4g_{ii} = \sum_a \frac{u_a^2}{(\rho_i-e_a)^2} = -R'(\rho_i) = -\frac{V_i}{A(\rho_i)}$$

である． □

直交座標の公式

$$\Delta_{S^n} f = \frac{1}{\sqrt{\det g}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\rho_i}\left(\sqrt{\det g}\, g^{ii}\frac{\partial f}{\partial \rho_i}\right)$$

に (13) を代入すると，

$$\boxed{\Delta_{S^n} = -4\sum_{i=1}^{n}\frac{A(\rho_i)}{V_i}\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho_i^2}+\frac{1}{2}\frac{A'(\rho_i)}{A(\rho_i)}\frac{\partial}{\partial\rho_i}\right]} \tag{14}$$

を得る．ここで

$$\frac{A'(t)}{A(t)} = \sum_{a=1}^{n+1}\frac{1}{t-e_a} \tag{15}$$

である．

5　積型変数分離

球面固有値方程式

$$(\Delta_{S^n} + l(l+n-1))\,F = 0 \tag{16}$$

に

$$F(\rho_1, \dots, \rho_n) = \prod_{i=1}^{n} X_i(\rho_i) \tag{17}$$

を代入する．各 X_i が零でない局所長方形上で積を割ると

$$l(l+n-1) = \sum_{i=1}^{n} \frac{M_i(\rho_i)}{V_i}, \tag{18}$$

ただし

$$M_i(t) := 4\frac{A(t)}{X_i(t)}\left[X_i''(t) + \frac{1}{2}\frac{A'(t)}{A(t)}X_i'(t)\right] \tag{19}$$

である．問題は，右辺が全ての独立変数に依存しないという条件が M_i に何を強制するかである．

6　分割差分による分離定数の決定

$I \subset \{1, \dots, n\}$，$|I| = N \geq 1$ に対して

$$\mathcal{D}_I[M] := \sum_{i \in I} \frac{M_i(\rho_i)}{\displaystyle\prod_{j \in I \setminus \{i\}} (\rho_i - \rho_j)} \tag{20}$$

と定義する．

定理 6.1 (最高次分割差分が定数となる関数族)**.** 互いに交わらない開区間 J_i 上の関数 $M_i : J_i \to \mathbb{R}$ が

$$\mathcal{D}_{\{1,\dots,n\}}[M] = \beta_0 \tag{21}$$

を全ての $(\rho_1, \dots, \rho_n) \in J_1 \times \cdots \times J_n$ で満たすとする．このとき一意な多項式

$$P(t) = \beta_0 t^{n-1} + \beta_1 t^{n-2} + \cdots + \beta_{n-1} \tag{22}$$

が存在して

$$M_i(t) = P(t), \qquad t \in J_i, \tag{23}$$

が全ての i で成り立つ．

Proof. 各 J_i から節点 t_i を一つずつ選び，Q を $Q(t_i) = M_i(t_i)$ を満たす次数 $n-1$ 以下の補間多項式とする．Lagrange 公式により Q の最高次係数は

$$\sum_i \frac{M_i(t_i)}{\prod_{j \neq i}(t_i - t_j)} = \beta_0$$

である．固定した i について t_i を任意の $x \in J_i$ に置き換えた補間多項式を Q_x とする．$Q_x - Q$ は $n-1$ 個の共通節点で零になり，しかも最高次係数が相殺されるため次数は $n-2$ 以下である．ゆえに $Q_x = Q$ であり，$M_i(x) = Q(x)$ である．i, x の任意性から $P := Q$ が得られ，一意性も明らかである． □

定義 6.2. 完全斉次対称多項式を

$$h_m(x_1, \ldots, x_N) := \sum_{1 \le i_1 \le \cdots \le i_m \le N} x_{i_1} \cdots x_{i_m}, \qquad h_0 := 1, \tag{24}$$

とし，$m < 0$ では $h_m := 0$ とする．

補題 6.3. 相異なる $x_1, \ldots, x_N$ に対して

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i^m}{\prod_{j \ne i}(x_i - x_j)} = h_{m-N+1}(x_1, \ldots, x_N) \tag{25}$$

が成り立つ．

Proof. 恒等式

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\prod_{j \ne i}(x_i - x_j)} \frac{1}{1 - x_i z} = \frac{z^{N-1}}{\prod_{i=1}^{N}(1 - x_i z)} \tag{26}$$

で z^m の係数を比較する． □

系 6.4. 定理 6.1 のもとで，$I \subset \{1, \ldots, n\}$，$|I| = N$ に対し

$$\mathcal{D}_I[M] = \sum_{r=0}^{n-N} \beta_r h_{n-N-r}\big((\rho_i)_{i \in I}\big) \tag{27}$$

である．

この系は元原稿で帰納法により示そうとしていた主張に対応する．補間定理を先に示すことで，添字の入れ替えや帰納法の段階に伴う複雑さを避けられる．

7 一般化 Lamé 方程式

(18) と定理 6.1 を比較すると

$$\beta_0 = l(l + n - 1) \tag{28}$$

であり，全ての X_i は

$$\boxed{X''(t) + \frac{1}{2} \sum_{a=1}^{n+1} \frac{1}{t - e_a} X'(t) - \frac{P(t)}{4A(t)} X(t) = 0,} \qquad P(t) = \sum_{r=0}^{n-1} \beta_r t^{n-1-r} \tag{29}$$

を満たす．各因子の違いは，t が走る区間 (e_{i+1}, e_i) と境界条件にある．

積を割る操作は $X_i \neq 0$ の局所領域で行った．しかし，他の変数をそれぞれ一つの非零点に固定して (18) を $M_i(t)$ について解けば，右辺は t の一つの多項式となるため，同じ P が $X_i(t) \neq 0$ の全ての点で成立する．そこで

$$4AX_i'' + 2A'X_i' - PX_i = 0$$

という積を割らない形に戻せば，等式は連続性により X_i の零点にも延長される．

7.1 Fuchs 型とアクセサリパラメータ

有限点 e_a では一階微分係数が単純極，零階係数も高々単純極をもち，従って正則特異点である．無限遠では

$$\frac{1}{2}\sum_a \frac{1}{t-e_a} = O(t^{-1}), \qquad \frac{P(t)}{4A(t)} = O(t^{-2})$$

なので無限遠点も正則特異点である．よって (29) は

$$e_1, \dots, e_{n+1}, \infty$$

という $n{+}2$ 個の正則特異点をもつ Fuchs 型方程式である．β_0 は l により固定され，$\beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ がアクセサリパラメータとなる．ただし，球面上で大域的に正則な固有関数を求めるとき，これらは任意ではなく，各区間端での正則性を同時に満たす多重パラメータ固有値問題によって離散的に選ばれる．

7.2 局所指数

$t = e_a$ で $X \sim (t-e_a)^s$ と置くと指数方程式は

$$s(s-1) + \frac{1}{2}s = s\left(s - \frac{1}{2}\right) = 0 \tag{30}$$

である．したがって有限特異点の指数は 0 と 1/2 である．一方，$t \to \infty$ で $X \sim t^s$ と置けば

$$\left(s - \frac{l}{2}\right)\left(s + \frac{l+n-1}{2}\right) = 0 \tag{31}$$

を得る．増大する枝は $t^{l/2}$ である．

7.3 多項式と Lamé 準多項式

各有限特異点で指数 0 または 1/2 を選ぶため，正則な分離解は一般に

$$X(t) = \prod_{a=1}^{n+1} |t-e_a|^{p_a/2}\, E(t), \qquad p_a \in \{0, 1\} \tag{32}$$

の形をとる．E が多項式であるとき，X を Lamé 準多項式と呼ぶ．全ての $p_a = 0$ なら $X = E$ は通常の Heine–Stieltjes 多項式であるが，一般の parity（各 Cartesian 座標 u_a に関する偶奇性）を表すには $p_a = 1$ の平方根因子が必要である．

文献 [1] の記法では，零点の個数を指定する多重指数を $\boldsymbol{m}$，$|\boldsymbol{p}| = \sum_a p_a$ とすると，対応する球面調和多項式の次数は

$$l = 2\,|\boldsymbol{m}| + |\boldsymbol{p}| \tag{33}$$

となる．したがって通常の多項式解だけを扱うと，奇の parity をもつ調和多項式を除外してしまう．

8 低次元での確認

8.1 $n = 1$: 円周 S^1

この場合 $P(t) = \beta_0 = l^2$ であり，

$$X'' + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-e_1} + \frac{1}{t-e_2}\right)X' - \frac{l^2}{4(t-e_1)(t-e_2)}X = 0 \tag{34}$$

となる．特異点は e_1, e_2, ∞ の三つであり，Möbius 変換により Gauss 超幾何型へ移る．アクセサリパラメータは存在しない．

8.2 $n = 2$: 通常の Lamé 方程式

この場合

$$P(t) = l(l+1)t + \beta_1, \qquad A(t) = (t-e_1)(t-e_2)(t-e_3),$$

したがって

$$X'' + \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{3}\frac{1}{t-e_a}X' - \frac{l(l+1)t + \beta_1}{4(t-e_1)(t-e_2)(t-e_3)}X = 0 \tag{35}$$

を得る．これは代数形の Lamé 方程式であり，四つの正則特異点をもつ Heun 型方程式の特殊例である．β_1 が一つのアクセサリパラメータとなる．

次元 n	正則特異点数	型	自由なアクセサリパラメータ数
1	3	Gauss 超幾何型	0
2	4	Lamé / 特殊 Heun 型	1
一般 n	$n+2$	Heine–Stieltjes 型	$n-1$

9 結論

Sphero-conal 座標の核心は，有理関数恒等式 (8) にある．この恒等式は球面条件，錐面による座標の特徴づけ，直交計量を同時に与え，Laplace–Beltrami 作用素 (14) の導出を簡潔にする．

変数分離後の式 (18) は，最高次分割差分が定数であることを表す．Lagrange 補間を用いると，全ての一変数項が共通多項式 P に一致することが直ちに分かり，一般化 Lamé 方程式 (29) が得られる．大域的な球面調和関数を構成するには，アクセサリパラメータの固有値条件と，指数 1/2 を許す Lamé 準多項式を併せて考える必要がある．

参考文献

[1] H. Volkmer, “Generalized Ellipsoidal and Sphero-Conal Harmonics,” *SIGMA* **2** (2006), Paper 071, 16 pages, doi:10.3842/SIGMA.2006.071.

[2] 野村隆昭,『球面調和函数と群の表現』, 日本評論社, 2018 年.