

Sphero-conal (sphero-elliptic) 座標と 一般化 Lamé 方程式

高次元球面上の幾何, 変数分離, 分割差分

adhara_mathphys

2026 年 7 月 1 日

概要

$\mathbb{R}^{n+1}$ の単位球面 S^n に sphero-conal (spheroconal, sphero-conical, sphero-elliptic) 座標を導入し, 球面 Laplace–Beltrami 固有値方程式を変数分離する. 座標変換を表す有理関数恒等式から計量と Laplace–Beltrami 作用素を導出し, 積型解に対する分離条件を得る. その分離条件は「最高次分割差分が定数」という機能方程式であり, Lagrange 補間によって全ての一変数因子が同一の次数 $n - 1$ 以下の分離多項式を含む Fuchs 型方程式に従うことが分かる. さらに, 有限特異点の局所指数, アクセサリパラメータ, 多項式解と Lamé 準多項式の違い, $n = 1, 2$ の低次元例を整理する. なお, 本ノートの基本的なアイデアと数式上の骨格は adhara_mathphys が用意したものであり, 本文の構成, 記法の整理, および LaTeX 原稿としての整形には生成 AI を補助的に用いた. 最終的な内容の確認と責任は adhara_mathphys に属する.

目次

1	導入	2
2	球面調和関数	2
3	Sphero-conal 座標の定義と幾何	3
3.1	基本有理関数恒等式	3
4	計量と Laplace–Beltrami 作用素	4
5	積型変数分離	5
6	分割差分による分離定数の決定	5
7	一般化 Lamé 方程式	6
7.1	Fuchs 型とアクセサリパラメータ	7
7.2	局所指数	7

7.3	多項式と Lamé 準多項式	7
8	低次元での確認	8
8.1	$n = 1$: 円周 S^1	8
8.2	$n = 2$: 通常の Lamé 方程式	8
9	結論	8

1 導入

三次元の sphero-conal 座標では, 球面上の座標曲線は互いに直交する楕円錐と球面との交線である. この座標で球面調和関数を変数分離すると Lamé 方程式が現れる. 本稿ではこの構成を $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ に拡張し, 次の三点を明確にする.

1. 座標変換から計量と Δ_{S^n} をどのように得るか.
2. 分離定数がなぜ一つの次数 $n - 1$ 以下の多項式に統合されるか.
3. 多項式解だけでなく, 平方根因子をもつ Lamé 準多項式がなぜ必要か.

文献 [1] は任意次元の sphero-conal 座標を扱い, さらに Laplace 方程式を Dunkl 方程式へ拡張している. 本稿はそのうち通常の Laplace 方程式に対応する部分を自足的に整理する. したがって, 本稿でいう「一般化 Lamé 方程式」は主として高次元化された分離方程式を指し, 文献 [1] の “generalized” が指す Dunkl パラメータによる一般化とは区別する.

2 球面調和関数

$n \geq 1$ とし,

$$S^n = \{u = (u_1, \dots, u_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |u| = 1\}$$

とする. $x = ru$ ($r > 0, u \in S^n$) により

$$\Delta_{\mathbb{R}^{n+1}} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_{S^n} \quad (1)$$

である. $G(r, u) = R(r)F(u)$ を $\Delta_{\mathbb{R}^{n+1}} G = 0$ に代入すると

$$(\Delta_{S^n} + \lambda) F = 0, \quad (2)$$

$$R'' + \frac{n}{r} R' - \frac{\lambda}{r^2} R = 0 \quad (3)$$

を得る.

$-\Delta_{S^n}$ の固有値は

$$\lambda_l = l(l + n - 1), \quad l \in \mathbb{N}_0 \quad (4)$$

であり, 対応する固有関数を次数 l の球面調和関数という. 次数 l の斉次調和多項式 H_l は $H_l(ru) = r^l H_l(u)$ と書け, その球面への制限が (4) の固有関数になる [2, 第 6–7 章]. 逆に球面調和関数は斉次調和多項式へ延長できる.

注意 2.1. $l \in \mathbb{N}_0$ という条件は単なる「一価性」からではなく, コンパクト多様体 S^n 上の楕円型自己共役作用素 $-\Delta_{S^n}$ のスペクトルから生じる.

3 Sphero-conal 座標の定義と幾何

実数

$$e_1 > e_2 > \cdots > e_{n+1} \quad (5)$$

を固定し,

$$e_i > \rho_i > e_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n \quad (6)$$

とする. 符号 $\varepsilon_a \in \{-1, 1\}$ を固定した開象限内で

$$u_a = \varepsilon_a \sqrt{\frac{\prod_{i=1}^n (\rho_i - e_a)}{\prod_{\substack{b=1 \\ b \neq a}}^{n+1} (e_b - e_a)}}, \quad a = 1, \dots, n+1 \quad (7)$$

と定める.

3.1 基本有理関数恒等式

命題 3.1. (7) で定めた u_a に対して

$$\sum_{a=1}^{n+1} \frac{u_a^2}{t - e_a} = \frac{\prod_{i=1}^n (t - \rho_i)}{\prod_{a=1}^{n+1} (t - e_a)} \quad (8)$$

が成り立つ.

Proof. 右辺を部分分数分解する. $t = e_a$ における留数は

$$\frac{\prod_i (e_a - \rho_i)}{\prod_{b \neq a} (e_a - e_b)} = \frac{\prod_i (\rho_i - e_a)}{\prod_{b \neq a} (e_b - e_a)} = u_a^2$$

である. 両辺はともに $t \rightarrow \infty$ で $t^{-1} + O(t^{-2})$ となるため一致する. $\square$

$t \rightarrow \infty$ で t^{-1} の係数を比較すると

$$\sum_{a=1}^{n+1} u_a^2 = 1 \quad (9)$$

が従う. また $t = \rho_i$ とおけば

$$\sum_{a=1}^{n+1} \frac{u_a^2}{\rho_i - e_a} = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (10)$$

を得る. ρ_i を固定した式は原点を頂点とする二次錐面であり, その球面との交わりが座標曲面である.

注意 3.2. $\rho_i = e_i$ または e_{i+1} ではいずれかの u_a が零となり, 座標は退化する. したがって以下の微分計算は (6) の内部で行う. 球面全体は異なる符号 ε_a の座標領域を貼り合わせて覆う.

4 計量と Laplace–Beltrami 作用素

次の多項式を置く:

$$A(t) := \prod_{a=1}^{n+1} (t - e_a), \quad V_i := \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\rho_i - \rho_j). \quad (11)$$

符号を固定した座標領域では

$$\frac{\partial u_a}{\partial \rho_i} = \frac{u_a}{2(\rho_i - e_a)}. \quad (12)$$

したがって誘導計量 $g_{ij} = \sum_a (\partial_i u_a)(\partial_j u_a)$ は次で与えられる.

命題 4.1. *Sphero-conal* 座標は直交座標であり,

$$g_{ij} = 0 \quad (i \neq j), \quad g_{ii} = -\frac{1}{4} \frac{V_i}{A(\rho_i)}. \quad (13)$$

(6) のもとで右辺は正である.

Proof. $R(t) := \sum_a u_a^2 / (t - e_a)$ と置く. $i \neq j$ なら

$$4g_{ij} = \sum_a \frac{u_a^2}{(\rho_i - e_a)(\rho_j - e_a)} = \frac{R(\rho_i) - R(\rho_j)}{\rho_j - \rho_i} = 0$$

である. また

$$4g_{ii} = \sum_a \frac{u_a^2}{(\rho_i - e_a)^2} = -R'(\rho_i) = -\frac{V_i}{A(\rho_i)}$$

である. □

直交座標の公式

$$\Delta_{S^n} f = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \rho_i} \left(\sqrt{\det g} g^{ii} \frac{\partial f}{\partial \rho_i} \right)$$

に (13) を代入すると,

$$\Delta_{S^n} = -4 \sum_{i=1}^n \frac{A(\rho_i)}{V_i} \left[\frac{\partial^2}{\partial \rho_i^2} + \frac{1}{2} \frac{A'(\rho_i)}{A(\rho_i)} \frac{\partial}{\partial \rho_i} \right] \quad (14)$$

を得る. ここで

$$\frac{A'(t)}{A(t)} = \sum_{a=1}^{n+1} \frac{1}{t - e_a} \quad (15)$$

である.

5 積型変数分離

球面固有値方程式

$$(\Delta_{S^n} + l(l+n-1))F = 0 \quad (16)$$

に

$$F(\rho_1, \dots, \rho_n) = \prod_{i=1}^n X_i(\rho_i) \quad (17)$$

を代入する．各 X_i が零でない局所長方形上で積を割ると

$$l(l+n-1) = \sum_{i=1}^n \frac{M_i(\rho_i)}{V_i}, \quad (18)$$

ただし

$$M_i(t) := 4 \frac{A(t)}{X_i(t)} \left[X_i''(t) + \frac{1}{2} \frac{A'(t)}{A(t)} X_i'(t) \right] \quad (19)$$

である．問題は、右辺が全ての独立変数に依存しないという条件が M_i に何を強制するかである．

6 分割差分による分離定数の決定

$I \subset \{1, \dots, n\}$, $|I| = N \geq 1$ に対して

$$\mathcal{D}_I[M] := \sum_{i \in I} \frac{M_i(\rho_i)}{\prod_{j \in I \setminus \{i\}} (\rho_i - \rho_j)} \quad (20)$$

と定義する．

定理 6.1 (最高次分割差分が定数となる関数族)．互いに交わらない開区間 J_i 上の関数 $M_i : J_i \rightarrow \mathbb{R}$ が

$$\mathcal{D}_{\{1, \dots, n\}}[M] = \beta_0 \quad (21)$$

を全ての $(\rho_1, \dots, \rho_n) \in J_1 \times \dots \times J_n$ で満たすとする．このとき一意な多項式

$$P(t) = \beta_0 t^{n-1} + \beta_1 t^{n-2} + \dots + \beta_{n-1} \quad (22)$$

が存在して

$$M_i(t) = P(t), \quad t \in J_i, \quad (23)$$

が全ての i で成り立つ．

Proof. 各 J_i から節点 t_i を一つずつ選び、 Q を $Q(t_i) = M_i(t_i)$ を満たす次数 $n-1$ 以下の補間多項式とする．Lagrange 公式により Q の最高次係数は

$$\sum_i \frac{M_i(t_i)}{\prod_{j \neq i} (t_i - t_j)} = \beta_0$$

である．固定した i について t_i を任意の $x \in J_i$ に置き換えた補間多項式を Q_x とする． $Q_x - Q$ は $n - 1$ 個の共通節点で零になり，しかも最高次係数が相殺されるため次数は $n - 2$ 以下である．ゆえに $Q_x = Q$ であり， $M_i(x) = Q(x)$ である． i, x の任意性から $P := Q$ が得られ，一意性も明らかである． $\square$

定義 6.2. 完全斉次対称多項式を

$$h_m(x_1, \dots, x_N) := \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_m \leq N} x_{i_1} \cdots x_{i_m}, \quad h_0 := 1, \quad (24)$$

とし， $m < 0$ では $h_m := 0$ とする．

補題 6.3. 相異なる $x_1, \dots, x_N$ に対して

$$\sum_{i=1}^N \frac{x_i^m}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)} = h_{m-N+1}(x_1, \dots, x_N) \quad (25)$$

が成り立つ．ただし， $m \geq N - 1$ とする．

Proof. 恒等式

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)} \frac{1}{1 - x_i z} = \frac{z^{N-1}}{\prod_{i=1}^N (1 - x_i z)} \quad (26)$$

で z^m の係数を比較する． $\square$

系 6.4. 定理 6.1 のもとで， $I \subset \{1, \dots, n\}$ ， $|I| = N$ に対し

$$\mathcal{D}_I[M] = \sum_{r=0}^{n-N} \beta_r h_{n-N-r}((\rho_i)_{i \in I}) \quad (27)$$

である．

7 一般化 Lamé 方程式

(18) と定理 6.1 を比較すると

$$\beta_0 = l(l + n - 1) \quad (28)$$

であり，全ての X_i は

$$\boxed{X''(t) + \frac{1}{2} \sum_{a=1}^{n+1} \frac{1}{t - e_a} X'(t) - \frac{P(t)}{4A(t)} X(t) = 0,} \quad P(t) = \sum_{r=0}^{n-1} \beta_r t^{n-1-r} \quad (29)$$

を満たす．各因子の違いは， t が走る区間 (e_{i+1}, e_i) と境界条件にある．

積を割る操作は $X_i \neq 0$ の局所領域で行った．しかし，他の変数をそれぞれ一つの非零点に固定して (18) を $M_i(t)$ について解けば，右辺は t の一つの多項式となるため，同じ P が $X_i(t) \neq 0$ の全ての点で成立する．そこで

$$4AX_i'' + 2A'X_i' - PX_i = 0$$

という積を割らない形に戻せば、等式は連続性により X_i の零点にも延長される。

7.1 Fuchs 型とアクセサリパラメータ

有限点 e_a では一階微分係数が単純極、零階係数も高々単純極をもち、従って確定特異点である。無限遠では

$$\frac{1}{2} \sum_a \frac{1}{t - e_a} = O(t^{-1}), \quad \frac{P(t)}{4A(t)} = O(t^{-2})$$

なので無限遠点も確定特異点である。よって (29) は

$$e_1, \dots, e_{n+1}, \infty$$

という $n+2$ 個の確定特異点をもつ Fuchs 型方程式である。 β_0 は l により固定され、 $\beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ がアクセサリパラメータとなる。ただし、球面上で大域的に正則な固有関数を求めるとき、これらは任意ではなく、各区間端での正則性を同時に満たす多重パラメータ固有値問題によって離散的に選ばれる。

7.2 局所指数

$t = e_a$ で $X \sim (t - e_a)^s$ と置くと指数方程式は

$$s(s-1) + \frac{1}{2}s = s \left(s - \frac{1}{2} \right) = 0 \quad (30)$$

である。したがって有限特異点の指数は 0 と $1/2$ である。一方、 $t \rightarrow \infty$ で $X \sim t^s$ と置けば

$$\left(s - \frac{l}{2} \right) \left(s + \frac{l+n-1}{2} \right) = 0 \quad (31)$$

を得る。増大する枝は $t^{l/2}$ である。

7.3 多項式と Lamé 準多項式

各有限特異点で指数 0 または $1/2$ を選ぶため、正則な分離解は一般に

$$X(t) = \prod_{a=1}^{n+1} |t - e_a|^{p_a/2} E(t), \quad p_a \in \{0, 1\} \quad (32)$$

の形をとる。 E が多項式であるとき、 X を Lamé 準多項式と呼ぶ。全ての $p_a = 0$ なら $X = E$ は通常の Heine–Stieltjes 多項式であるが、一般の parity（各 Cartesian 座標 u_a に関する偶奇性）を表すには $p_a = 1$ の平方根因子が必要である。

文献 [1] の記法では、零点の個数を指定する多重指数を $\mathbf{m}$ 、 $|\mathbf{p}| = \sum_a p_a$ とすると、対応する球面調和多項式の次数は

$$l = 2|\mathbf{m}| + |\mathbf{p}| \quad (33)$$

となる。したがって通常が多項式解だけを扱うと、奇の parity をもつ調和多項式を除外してしまう。

8 低次元での確認

8.1 $n = 1$: 円周 S^1

この場合 $P(t) = \beta_0 = l^2$ であり,

$$X'' + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t - e_1} + \frac{1}{t - e_2} \right) X' - \frac{l^2}{4(t - e_1)(t - e_2)} X = 0 \quad (34)$$

となる. 特異点は e_1, e_2, ∞ の三つであり, Möbius 変換により Gauss 超幾何型へ移る. アクセサリパラメータは存在しない.

8.2 $n = 2$: 通常の Lamé 方程式

この場合

$$P(t) = l(l+1)t + \beta_1, \quad A(t) = (t - e_1)(t - e_2)(t - e_3),$$

したがって

$$X'' + \frac{1}{2} \sum_{a=1}^3 \frac{1}{t - e_a} X' - \frac{l(l+1)t + \beta_1}{4(t - e_1)(t - e_2)(t - e_3)} X = 0 \quad (35)$$

を得る. これは代数形の Lamé 方程式であり, 四つの確定特異点をもつ Heun 型方程式の特殊例である. β_1 が一つのアクセサリパラメータとなる.

次元 n	確定特異点数	型	自由なアクセサリパラメータ数
1	3	Gauss 超幾何型	0
2	4	Lamé / 特殊 Heun 型	1
一般 n	$n + 2$	Heine–Stieltjes 型	$n - 1$

9 結論

Sphero-conal 座標の核心は, 有理関数恒等式 (8) にある. この恒等式は球面条件, 錐面による座標の特徴づけ, 直交計量を同時に与え, Laplace–Beltrami 作用素 (14) の導出を簡潔にする.

変数分離後の式 (18) は, 最高次分割差分が定数であることを表す. Lagrange 補間を用いると, 全ての一変数項が共通多項式 P に一致することが直ちに分かり, 一般化 Lamé 方程式 (29) が得られる. 大域的な球面調和関数を構成するには, アクセサリパラメータの固有値条件と, 指数 $1/2$ を許す Lamé 準多項式を併せて考える必要がある.

参考文献

- [1] H. Volkmer, “Generalized Ellipsoidal and Sphero-Conal Harmonics,” *SIGMA* **2** (2006), Paper 071, 16 pages, [doi:10.3842/SIGMA.2006.071](https://doi.org/10.3842/SIGMA.2006.071).

[2] 野村隆昭, 『球面調和函数と群の表現』, 日本評論社, 2018 年.