

Sphericoconical 座標から始まる Lamé の微分方程式

adhara*

2021 年 4 月 3 日

概要

本ノートでは Laplace 方程式を sphericoconical (円錐) 座標で変数分離することで Lamé の微分方程式を導入する。^{*1}この導出については例えば George Dassios の “Ellipsoidal harmonics: theory and applications.” という本^{*2}に載っている。

1 sphericoconical 座標の導入

デカルト座標 (x, y, z) と sphericoconical 座標 (r, ρ_1, ρ_2) の間の変換を

$$x = \pm r \sqrt{\frac{(\rho_1 - \alpha)(\rho_2 - \alpha)}{(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)}}, \quad y = \pm r \sqrt{\frac{(\beta - \rho_1)(\beta - \rho_2)}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)}}, \quad z = \pm r \sqrt{\frac{(\rho_1 - \gamma)(\gamma - \rho_2)}{(\gamma - \alpha)(\beta - \gamma)}} \quad (1)$$

で与える。ただし、

$$\alpha \leq \rho_2 \leq \gamma \leq \rho_1 \leq \beta, \quad r \geq 0, \quad \alpha < \gamma < \beta \quad (2)$$

とする。ここで α, β, γ はパラメータであり、これを定めるごとに座標系が定まる。

これら r, ρ_1, ρ_2 を指定した時に定まる 8 つの点 (各象限に一つ存在) はデカルト座標系の表示で三つの図形

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad (3)$$

$$\frac{x^2}{\rho_1 - \alpha} + \frac{y^2}{\rho_1 - \beta} + \frac{z^2}{\rho_1 - \gamma} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{x^2}{\rho_2 - \alpha} + \frac{y^2}{\rho_2 - \beta} + \frac{z^2}{\rho_2 - \gamma} = 0 \quad (5)$$

* Twitter @adhara_mathphys

^{*1} 歴史的には Gabriel Lamé が Laplace 方程式を ellipsoidal (楕円体) 座標で変数分離したことで Lamé の微分方程式が導入された。Lamé の微分方程式は Gabriel Lamé, “Sur les surfaces isothermes dans les corps solides homogènes en équilibre de température.”, Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 2 (1837), p. 147-183. で発表された。

^{*2} Dassios, George. Ellipsoidal harmonics: theory and applications. Vol. 146. Cambridge University Press, 2012. この本は sphericoconical 座標というよりは ellipsoidal 座標の方を主に扱う本であるが、sphericoconical 座標についてもかなり詳しい。

の交点である。一つ目の図形は球、二つ目の図形は y 軸方向に伸びる楕円錐、三つ目の図形は x 軸方向に伸びる楕円錐である。楕円錐と言っているのは例えば二つ目の図形について $y = Y \neq 0$ の断面を見ると

$$\frac{x^2}{\rho_1 - \alpha} + \frac{z^2}{\rho_1 - \gamma} = \frac{Y^2}{\beta - \rho_1} > 0 \quad (6)$$

のように楕円になっていることによる。三つ目の図形については $x = X \neq 0$ で断面を見ると

$$\frac{y^2}{\beta - \rho_2} + \frac{z^2}{\gamma - \rho_2} = \frac{X^2}{\rho_2 - \alpha} > 0 \quad (7)$$

のように楕円となる。

2 Laplace 方程式の spheroconical 座標による変数分離

2.1 Laplacian の spheroconical 座標表示

三次元 Laplacian $\nabla_{\mathbb{R}^3}^2$ を spheroconical 座標で表示する。このとき曲線直交座標系における Laplacian を求める公式によれば、

$$h_r = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} \quad (8)$$

$$h_{\rho_1} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \rho_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho_1}\right)^2} \quad (9)$$

$$h_{\rho_2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \rho_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho_2}\right)^2} \quad (10)$$

を用いて

$$\nabla_{\mathbb{R}^3}^2 = \frac{1}{h_r h_{\rho_1} h_{\rho_2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{h_{\rho_1} h_{\rho_2}}{h_r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\frac{h_{\rho_2} h_r}{h_{\rho_1}} \frac{\partial}{\partial \rho_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left(\frac{h_{\rho_1} h_r}{h_{\rho_2}} \frac{\partial}{\partial \rho_2} \right) \right\} \quad (11)$$

となる。ここで、

$$h_r = 1 \quad (12)$$

$$h_{\rho_1} = \frac{r}{2} \sqrt{\frac{\rho_1 - \rho_2}{(\rho_1 - \alpha)(\beta - \rho_1)(\rho_1 - \gamma)}} \quad (13)$$

$$h_{\rho_2} = \frac{r}{2} \sqrt{\frac{\rho_1 - \rho_2}{(\rho_2 - \alpha)(\beta - \rho_2)(\gamma - \rho_2)}} \quad (14)$$

を式 11 に代入すると、

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbb{R}^3}^2 &= \left(\frac{2}{r}\right)^2 \frac{\sqrt{(\rho_1 - \alpha)(\beta - \rho_1)(\rho_1 - \gamma)(\rho_2 - \alpha)(\beta - \rho_2)(\gamma - \rho_2)}}{\rho_1 - \rho_2} \\
&\times \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{\sqrt{(\rho_1 - \alpha)(\beta - \rho_1)(\rho_1 - \gamma)(\rho_2 - \alpha)(\beta - \rho_2)(\gamma - \rho_2)}} \left(\frac{r}{2}\right)^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \right. \\
&+ \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\sqrt{\frac{(\rho_1 - \alpha)(\beta - \rho_1)(\rho_1 - \gamma)}{(\rho_2 - \alpha)(\beta - \rho_2)(\gamma - \rho_2)}} \frac{\partial}{\partial \rho_1} \right) \\
&+ \left. \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left(\sqrt{\frac{(\rho_2 - \alpha)(\beta - \rho_2)(\gamma - \rho_2)}{(\rho_1 - \alpha)(\beta - \rho_1)(\rho_1 - \gamma)}} \frac{\partial}{\partial \rho_2} \right) \right] \\
&= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \left(\frac{2}{r}\right)^2 \frac{1}{\rho_1 - \rho_2} \\
&\times \left\{ \sqrt{(\rho_1 - \alpha)(\beta - \rho_1)(\rho_1 - \gamma)} \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\sqrt{(\rho_1 - \alpha)(\beta - \rho_1)(\rho_1 - \gamma)} \frac{\partial}{\partial \rho_1} \right) \right. \\
&+ \left. \sqrt{(\rho_2 - \alpha)(\beta - \rho_2)(\gamma - \rho_2)} \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left(\sqrt{(\rho_2 - \alpha)(\beta - \rho_2)(\gamma - \rho_2)} \frac{\partial}{\partial \rho_2} \right) \right\} \quad (15)
\end{aligned}$$

となる。

さて、sphericoconical 座標は球面座標である、すなわち r 一定の曲面が球面を定めることから、第二項は Laplacian の球面成分、すなわち S^2 上の Laplace-Beltrami 作用素（を r^2 で割ったもの）

$$\frac{1}{r^2} \nabla_{S^2}^2$$

となる。したがって、

$$\nabla_{\mathbb{R}^3}^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \nabla_{S^2}^2 \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{S^2}^2 &= \frac{4}{\rho_1 - \rho_2} \\
&\times \left\{ \sqrt{(\rho_1 - \alpha)(\beta - \rho_1)(\rho_1 - \gamma)} \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\sqrt{(\rho_1 - \alpha)(\beta - \rho_1)(\rho_1 - \gamma)} \frac{\partial}{\partial \rho_1} \right) \right. \\
&+ \left. \sqrt{(\rho_2 - \alpha)(\beta - \rho_2)(\gamma - \rho_2)} \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left(\sqrt{(\rho_2 - \alpha)(\beta - \rho_2)(\gamma - \rho_2)} \frac{\partial}{\partial \rho_2} \right) \right\} \quad (17)
\end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned}
\frac{\rho_1 - \rho_2}{4} \nabla_{S^2}^2 &= -(\rho_1 - \alpha)(\rho_1 - \beta)(\rho_1 - \gamma) \left[\frac{\partial^2}{\partial \rho_1^2} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\rho_1 - \alpha} + \frac{1}{\rho_1 - \beta} + \frac{1}{\rho_1 - \gamma} \right\} \frac{\partial}{\partial \rho_1} \right] \\
&+ (\rho_2 - \alpha)(\rho_2 - \beta)(\rho_2 - \gamma) \left[\frac{\partial^2}{\partial \rho_2^2} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\rho_2 - \alpha} + \frac{1}{\rho_2 - \beta} + \frac{1}{\rho_2 - \gamma} \right\} \frac{\partial}{\partial \rho_2} \right] \quad (18)
\end{aligned}$$

が導かれる。

2.2 Laplace 方程式の動径部分と球面部分への変数分離

Laplace 方程式

$$\nabla_{\mathbb{R}^3}^2 f = 0 \quad (19)$$

を r 依存の動径成分と ρ_1, ρ_2 依存の球面成分に変数分離することを考える。

まず、Laplace 方程式 19 の解 f が

$$f(r, \rho_1, \rho_2) = R(r)Y(\rho_1, \rho_2) \quad (20)$$

のように r 部分と ρ_1, ρ_2 部分で変数分離できることを仮定する。すると Laplace 方程式 19 は

$$Y(\rho_1, \rho_2) \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + R(r) \frac{1}{r^2} \nabla_{S^2}^2 Y(\rho_1, \rho_2) = 0 \quad (21)$$

となり、

$$\frac{1}{R(r)} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = - \frac{1}{Y(\rho_1, \rho_2)} \nabla_{S^2}^2 Y(\rho_1, \rho_2) \quad (22)$$

のように完全に変数分離される。上式左辺は r のみに依存、右辺は ρ_1, ρ_2 のみに依存するから、これを定数と置くことができる。この定数を $l(l+1)$ とする。これにより、

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R(r) = 0 \quad (23)$$

$$[\nabla_{S^2} + l(l+1)] Y(\rho_1, \rho_2) = 0 \quad (24)$$

という二つの微分方程式に分解される。変数分離の際に出てきた未定乗数 l は境界条件によって定められるべき量である。

ここで式 24 は $\nabla_{S^2}^2$ の固有値問題に他ならない。すなわち、 $Y(\rho_1, \rho_2)$ は $\nabla_{S^2}^2$ の固有関数であり球面調和関数となる。座標系によって球面調和関数を区別して呼ぶことがある。例えば、通常 of 球極座標によって変数分離したものについては spherical polar harmonics、球面調和関数を spheroconical 座標で変数分離したものを spherical elliptic harmonics と呼んで区別することがある。^{*3}

次節では、球面調和関数の spheroconical 座標による変数分離、すなわち式 24 を ρ_1 部分と ρ_2 部分に変数分離することを考える。

2.3 球面調和関数の spheroconical 座標による変数分離

ここでは、球面調和関数 $Y(\rho_1, \rho_2)$ が

$$Y(\rho_1, \rho_2) = \Theta(\rho_1)\Phi(\rho_2) \quad (25)$$

^{*3} Tolstikhin, Oleg I., and Michio Matsuzawa. "Hyperspherical elliptic harmonics and their relation to the Heun equation." *Physical Review A* 63.3 (2001): 032510.

のように ρ_1 部分と ρ_2 部分に変数分離されることを仮定する。

$\nabla_{S^2}^2$ の固有方程式 24 の両辺に $\rho_1 - \rho_2$ を掛けると、

$$[(\rho_1 - \rho_2) \nabla_{S^2} + l(l+1)(\rho_1 - \rho_2)] \Theta(\rho_1) \Phi(\rho_2) = 0 \quad (26)$$

となる。さらに Laplace-Beltrami 作用素の spheroconical 座標による表式 18 を用いて変形すると

$$\begin{aligned} & \frac{4}{\Theta(\rho_1)} (\rho_1 - \alpha)(\rho_1 - \beta)(\rho_1 - \gamma) \\ & \times \left[\frac{d^2}{d\rho_1^2} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\rho_1 - \alpha} + \frac{1}{\rho_1 - \beta} + \frac{1}{\rho_1 - \gamma} \right\} \frac{d}{d\rho_1} - \frac{l(l+1)\rho_1}{4(\rho_1 - \alpha)(\rho_1 - \beta)(\rho_1 - \gamma)} \right] \Theta(\rho_1) \\ & = \frac{4}{\Phi(\rho_2)} (\rho_2 - \alpha)(\rho_2 - \beta)(\rho_2 - \gamma) \\ & \times \left[\frac{d^2}{d\rho_2^2} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\rho_2 - \alpha} + \frac{1}{\rho_2 - \beta} + \frac{1}{\rho_2 - \gamma} \right\} \frac{d}{d\rho_2} - \frac{l(l+1)\rho_2}{4(\rho_2 - \alpha)(\rho_2 - \beta)(\rho_2 - \gamma)} \right] \Phi(\rho_2) \quad (27) \end{aligned}$$

完全変数分離された式を得る。左辺は ρ_1 のみに依存、右辺は ρ_2 のみに依存することから、定数 λ と置ける。この結果、次の二式を得る。

$$\left[\frac{d^2}{d\rho_1^2} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\rho_1 - \alpha} + \frac{1}{\rho_1 - \beta} + \frac{1}{\rho_1 - \gamma} \right\} \frac{d}{d\rho_1} - \frac{l(l+1)\rho_1 + \lambda}{4(\rho_1 - \alpha)(\rho_1 - \beta)(\rho_1 - \gamma)} \right] \Theta(\rho_1) = 0 \quad (28)$$

$$\left[\frac{d^2}{d\rho_2^2} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\rho_2 - \alpha} + \frac{1}{\rho_2 - \beta} + \frac{1}{\rho_2 - \gamma} \right\} \frac{d}{d\rho_2} - \frac{l(l+1)\rho_2 + \lambda}{4(\rho_2 - \alpha)(\rho_2 - \beta)(\rho_2 - \gamma)} \right] \Phi(\rho_2) = 0 \quad (29)$$

注目すべき点は ρ_1, ρ_2 に関する微分方程式が同一となる点である。ただし、変数の動くの範囲が異なる。これらの微分方程式は **Lamé の微分方程式** と呼ばれる。

参考文献

- [1] Gabriel Lamé, “Sur les surfaces isothermes dans les corps solides homogènes en équilibre de température.”, Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 2 (1837), p. 147-183.
- [2] Dassios, George. Ellipsoidal harmonics: theory and applications. Vol. 146. Cambridge University Press, 2012.
- [3] Tolstikhin, Oleg I., and Michio Matsuzawa. “Hyperspherical elliptic harmonics and their relation to the Heun equation.” Physical Review A 63.3 (2001): 032510.