二次元古典非等方調和振動子における $\mathfrak{su}(2)$ 対称性

adhara_mathphys

2024 年 8 月 18 日

1　エネルギー保存系におけるハミルトン形式の力学

ハミルトン形式の解析力学において，物理量 $A = A(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)$ の時間発展は，時間に陽に依存しないハミルトニアン $H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ を用いて，

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \sum_{i=1,2} \left[\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right] + \frac{\partial A}{\partial t} \\ &= \sum_{i} \left[\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right] + \frac{\partial A}{\partial t} \\ &= \sum_{i} \left[\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial H}{dp_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial H}{dq_i} \right] + \frac{\partial A}{\partial t} \\ &= \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t} \end{aligned} \tag{1}$$

のように与えられる．ただし，ポアソン括弧

$$\{A, B\} = \sum_i \left[\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right] \tag{2}$$

を導入した．

物理量 A が陽に時間に依らないときは，

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H\} \tag{3}$$

であり，このときに A が運動の積分，すなわち保存量となるためには，

$$\{A, H\} = 0 \tag{4}$$

が必要十分条件である．

2　二次元古典非等方調和振動子系とその保存量

本ノートでは，非等方とは「等方とは限らない」の意味とする．二次元古典非等方調和振動子系のハミルトニアンは，

$$H = H_1 + H_2,\ H_i = \frac{\omega_i^2 q_i^2}{2} + \frac{p_i^2}{2} \quad (i = 1, 2) \tag{5}$$

の形をとる．

この系の最も簡単な保存量としては，$H,\ H_i\ (i = 1, 2)$ がある．この中で関数独立な組としては例えば $H,\ H_2$ がある．

他の保存量として実際に運動方程式を解くことで見つかるものがある．運動方程式を解くとこの系における q_i, p_i の時間発展は，

$$\begin{aligned} q_i &= \frac{\sqrt{2H_i}}{\omega_i}\cos(\omega_i t + \theta_i) \\ p_i &= -\sqrt{2H_i}\sin(\omega_i t + \theta_i) \end{aligned} \tag{6}$$

となる．ただし，$\theta_i\ (i = 1, 2)$ は，初期値と

$$q_i(0) = \frac{\sqrt{2H_i}}{\omega_i}\cos(\theta_i) \tag{7}$$

$$p_i(0) = -\frac{\sqrt{2H_i}}{\omega_i}\sin(\theta_i) \tag{8}$$

のように結びつく．この θ_i たちは時間発展の間で運動の間変化しない量である．保存量を見出すために，$\theta_i\ (i = 1, 2)$ を p, q, t の関数として表す．式 6 より，多価関数 $\tan^{-1}$ を用いて

$$\theta_i = -\tan^{-1}\left(\frac{p_i}{\omega_i q_i}\right) - \omega_i t \tag{9}$$

という関係式が出る．従って，改めて

$$\Theta_i(p, q, t) := -\tan^{-1}\left(\frac{p_i}{\omega_i q_i}\right) - \omega_i t \tag{10}$$

という物理量を導入すると，$\Theta_i\ (i = 1, 2)$ は保存量の可能性がある．実際に時間発展を計算すると，

$$\begin{aligned} \{\Theta_i, H\} &= \{\Theta_i, H_i\} \\ &= \frac{\partial \Theta_i}{\partial q_i}\frac{\partial H_i}{\partial p_i} - \frac{\partial \Theta_i}{\partial p_i}\frac{\partial H_i}{\partial q_i} \\ &= \frac{p_i}{\omega_i q_i^2}\frac{1}{1 + \left(\frac{p_i}{\omega_i q_i}\right)^2} p_i + \frac{1}{\omega_i q_i}\frac{1}{1 + \left(\frac{p_i}{\omega_i q_i}\right)^2}\omega_i^2 q_i \\ &= \frac{p_i^2 \omega_i + q_i^2 \omega_i^3}{p_i^2 + (\omega_i q_i)^2} \\ &= \omega_i \end{aligned} \tag{11}$$

より，

$$
\begin{aligned}
\frac{d\Theta_i}{dt} &= \{\Theta_i, H\} + \frac{\partial \Theta_i}{\partial t} \\
&= \omega_i - \omega_i \\
&= 0 \qquad (12)
\end{aligned}
$$

となり，Θ_i は多価関数ではあるが，保存量である．また，$\frac{\Theta_i}{\omega_i} - \frac{\Theta_j}{\omega_j}$ $(i \neq j)$ は t に陽に依存しない保存量である．

3　二次元古典非等方調和振動子系に潜む $\mathfrak{su}(2)$ 代数

Mukunda[1] によれば，ハミルトニアン自体と 2 つのハミルトニアン以外の保存量が時間に陽に依存しない正準変数となるように正準変換を行うことで，$\mathfrak{su}(2)$ 代数を成す保存量を構成できる．まず，以下の変換

$$Q_1 := H \tag{13}$$

$$Q_2 := \frac{H_2}{\omega_1} \tag{14}$$

$$P_1 := -\frac{\Theta_1}{\omega_1} - t \tag{15}$$

$$P_2 := \Theta_1 - \frac{\Theta_2 \omega_1}{\omega_2} \tag{16}$$

において，P_i, Q_i $(i = 1, 2)$ はいずれも t に陽に依存しないこと，および

$$\{P_i, P_j\} = \{Q_i, Q_j\} = 0,\ \{Q_i, P_j\} = \delta_{i,j} \tag{17}$$

が成立することから，これはハミルトニアン自体と 2 つのハミルトニアン以外の保存量（Q_2, P_2）が時間に陽に依存しない正準変数となる正準変換である*1．ここで，ハミルトニアンを含む 3 つの保存量 Q_1, Q_2, P_2 は関数独立である．

これを用いると $\mathfrak{su}(2)$ 代数を成す保存量は以下で与えられる：

$$A_1 = Q_2 \tag{18}$$

$$A_2 = \sqrt{j_A^2 - Q_2^2} \cos P_2 \tag{19}$$

$$A_3 = \sqrt{j_A^2 - Q_2^2} \sin P_2. \tag{20}$$

ただし，$|j_A| > |Q_2|$ は定数．これらの間のポアソン括弧を計算すると，

$$\{A_i, A_j\} = -\epsilon_{ijk} A_k \tag{21}$$

となる．これは $\mathfrak{su}(2)$ 代数の元の間のリー括弧演算に他ならない．

*1 式 17 は $\{Q_2, H\} = \{P_2, H\} = 0$ を含む．

4　保存量 A_2, A_3 は何価関数か？

先ほど構成した $\mathfrak{su}(2)$ 代数を成す保存量のうち A_2, A_3 は実は p_1, p_2, q_1, q_2 の無限多価関数となる場合，有限多価関数となる場合，一価関数となる場合がある．これを見るために P_2 を p_1, p_2, q_1, q_2 の関数としてまず明示する：

$$P_2 = \frac{\omega_1}{\omega_2} \tan^{-1}\left(\frac{p_2}{\omega_2 q_2}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{p_1}{\omega_1 q_1}\right). \tag{22}$$

これを眺めると，$p_1 - q_1$ 平面で (p_1, q_1) を原点を回る閉曲線で一周すると，P_2 は 2π だけ大きくあるいは小さくなる．つまり，$p_1 - q_1$ 平面で原点を回る閉曲線で何周しても元の点に戻れば $\cos P_2, \sin P_2$ の値は変わらない．

1. $\omega_1 = \omega_2$，すなわち等方調和振動子のとき：

$$P_2 = \tan^{-1}\left(\frac{p_2}{\omega_2 q_2}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{p_1}{\omega_1 q_1}\right)$$

である．これを眺めると，$p_2 - q_2$ 平面で (p_2, q_2) を原点を回る閉曲線で一周すると，P_2 は 2π だけ大きくあるいは小さくなる．つまり，$p_2 - q_2$ 平面で原点を回る閉曲線で何周しても元の点に戻れば $\cos P_2, \sin P_2$ の値は変わらない．このことから，$\cos P_2, \sin P_2$ は p_1, p_2, q_1, q_2 の一価関数であると見做せることがわかる．

2. $\omega_1 \neq \omega_2, \frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{Q}$，すなわち “commensurate”非等方調和振動子のとき：ここで $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{N}{M}, \mathrm{GCD}(N, M) = 1$ とする．このとき，

$$P_2 = \frac{N}{M} \tan^{-1}\left(\frac{p_2}{\omega_2 q_2}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{p_1}{\omega_1 q_1}\right)$$

である．これを眺めると，$p_2 - q_2$ 平面で (p_2, q_2) を原点を回る閉曲線で L 周すると，L が M の整数倍のときに限って P_2 は 2π の整数倍だけ大きくあるいは小さくなる．つまり，$p_2 - q_2$ 平面で原点を回る閉曲線で M の整数倍周したときに限って元の点に戻れば $\cos P_2, \sin P_2$ の値は変わらない．さらに $\cos P_2, \sin P_2$ は周回数が $\mathrm{mod}\ M$ で同じであればそのときに限って同じ値となる．すなわち，$\cos P_2, \sin P_2$ は p_1, p_2, q_1, q_2 の M 価関数である．

3. $\omega_1 \neq \omega_2, \frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{Q}$，すなわち “incommensurate”非等方調和振動子のとき：このときは，$p_2 - q_2$ 平面で (p_2, q_2) を原点を回る閉曲線で何周しても，元の点に戻ったときに P_2 は 2π の整数倍だけ大きくなったり小さくなることはない．つまり，$p_2 - q_2$ 平面で原点を回る閉曲線で何周しても元の点で $\cos P_2, \sin P_2$ の値が同じ値に戻ることはない．このことから，$\cos P_2, \sin P_2$ は p_1, p_2, q_1, q_2 の無限多価関数である．

5　保存量 A_2, A_3 の価数の物理的意味

一価あるいは有限多価のとき，位相空間中の軌道が閉軌道を成す（一次元多様体 S^1 と同相）ことに相当する，つまりいつかは初期値に戻ることを意味する．無限多価のとき，位相空間中の軌道が閉軌道を成さないことに相当する，つまり時間発展によって初期値の近傍を通ることはあり得ても初期値に戻ることはあり得ない．

参考文献

[1] Mukunda, N., 1967. “Dynamical Symmetries and Classical Mechanics”, Phys. Rev. 155, 1383-1386. link

[2] Amiet, J.-P., Weigert, S., 2002. “Commensurate harmonic oscillators: Classical symmetries”, J. Math. Phys. 43, 4110-4126. link

[3] Stehle, P., Han, M.Y., 1967. “Symmetry and Degeneracy in Classical Mechanics” Phys. Rev. 159, 1076 - 1082. link