

非相対論的水素原子に潜む数理

2017年11月19日

[伊藤祐斗](#)

量子と古典の物理と幾何@九大

本日の発表内容

❖ 背景

❖ 力学的対称性 ~ $so(4), so(3,1), iso(3)$ の構成 ~

❖ 力学的群その1 ~ $so(4,1)$ の構成 ~

❖ スペクトル生成代数 ~ $su(1,1)$ の構成 ~

❖ 力学的群その2 ~ $so(4,2)$ の構成 ~

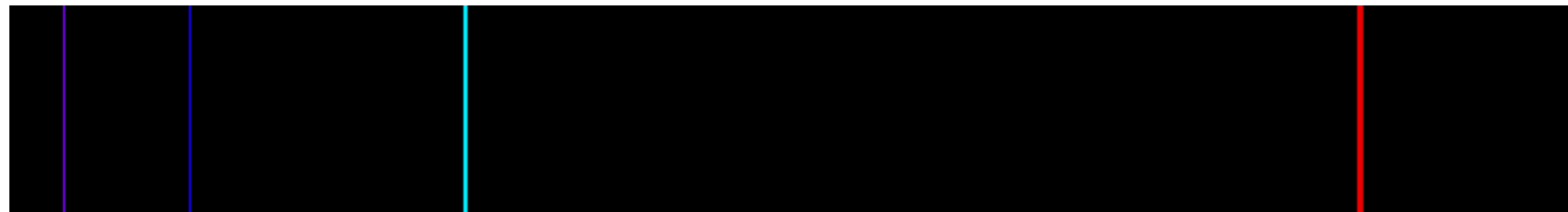
❖ まとめと結論

背景

発表概要より抜粋

水素原子におけるスペクトル系列の発見とその解明の試みは、量子力学が成立するにあたり重要な役割を果たしました。とりわけ、非相対論的水素原子に関するシュレディンガー方程式の解法はその象徴というべきものであり、教科書や大学の講義では必ずと言ってよいほど扱われる題材です。一方で、シュレディンガーによって非相対論的水素原子の問題が解かれた後も、様々な数学的手法によって方程式に潜む数理を解明する試みが続きました。

水素の輝線スペクトル。



https://ja.wikipedia.org/wiki/バルマー系列#/media/File:Emission_spectrum-H.png

なぜ人は水素原子を調べるのか？

❖ 理論誕生の舞台

★ 量子力学の誕生、量子電磁力学の誕生

❖ 測定技術の精密化の舞台

★ スペクトルの測定、各種物理定数の決定

❖ 数理物理進化の舞台

★ 力学的対称性（超可積分）、力学的群、スペクトル生成代数、一般化コヒーレント状態、経路積分の時空変換、厳密可解の量子力学

単純な系ではあるが重要な役割を果たしてきた。

水素原子の前期量子論

❖ [Balmer](#)の水素原子スペクトル系列発見 (1885)

❖ [Rydberg](#)の公式 (1888)

$$\frac{1}{\lambda} = R_{\infty} \left| \frac{1}{(n')^2} - \frac{1}{n^2} \right| \quad \text{Balmer系列は} n=2 \text{のケース}$$

$$R_{\infty} = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^3 c} = 1.097\,373\,156\,8508(65) \times 10^7 \text{ m}^{-1} \quad \text{2014 } \text{CODATA}$$

❖ [Bohr](#)の量子化条件 (1913)

$$m_e v r = \frac{N h}{2\pi} \quad N = 1, 2, 3, \dots$$

❖ [de Broglie](#)波 (物質波) (1924)

- ・運動量と波長を対応づけた
- ・電子の粒子性と波動性

$$\lambda = \frac{h}{m_e v}$$

- ・Bohrの量子化条件はde Broglie波が定在波となる条件

Schrödingerの球座標解法

❖ Schrödinger方程式の固有値問題（球座標での変数分離解法 1926）

$$H\Psi(\mathbf{r}) = \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m_e} - \frac{\kappa}{r} \right] \Psi(\mathbf{r}) = E\Psi(\mathbf{r}) \quad \kappa = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}$$

❖ 束縛状態のエネルギーは次のようになる。

$$E_N = -\frac{1}{2N^2} \frac{\kappa^2 m_e}{\hbar^2}$$

❖ 対応する波動関数は次のようになる。

$$\Psi_{Nlm}(r, \theta, \phi) = c_l e^{-\alpha_N r} (\alpha_N r)^l L_{N-l-1}^{2l+1}(2\alpha_N r) Y_{lm}(\theta, \phi) \quad \alpha_N = \frac{\kappa m_e}{N\hbar^2}$$

❖ ここで、Lは[Laguerre陪多項式](#)、Yは[球面調和関数](#)。Nは主量子数、lは角運動量量子数、mは磁気量子数と呼ばれる。

◎ Schrödingerは他の水素原子の解法（放物線座標解法 1926・因数分解解法 1940）に貢献がある。区別のために球座標解法と書いた。

回転対称性に基づく縮退

- ❖ 球対称性を持つ系では角運動量が保存される。
- ❖ SO(3)群のユニタリ表現論によって縮退度を説明できるはず。
- ❖ 既約部分空間の次元 (= 縮退度) は $2l+1$ となる (スピン除く)
- ❖ 角運動量ベクトルはSO(3)の生成元となる \Rightarrow 角運動量代数so(3)

$$L_k = \epsilon_{ijk} x_i p_j \quad (\text{角運動量定義})$$

$$[L_i, L_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} L_k \quad (\text{交換関係})$$

$$[H, L_i] = 0 \quad (\text{角運動量保存則})$$

- ❖ 既約表現は L_3 を対角化する基底で表されることが多い。

$$L^2 |l, m\rangle = \hbar^2 l(l+1) |l, m\rangle \quad l \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad (\text{角運動量量子数})$$

$$L_3 |l, m\rangle = \hbar m |l, m\rangle \quad m = -l, -l+1, \dots, l-1, l \quad (\text{磁気量子数})$$

角運動量保存則を超えた縮退

- ❖ 水素原子のエネルギーは角運動量量子数 l ではなくて、主量子数 N に依存する。
- ❖ 縮退度は N を用いて次のようになり、 **$2l+1$ よりも大きい**。

$$N^2 = \sum_{l=0}^{N-1} (2l + 1)$$

- ❖ $SO(3)$ を超えた多重縮退は「偶然」縮退 (accidental degeneracy) と呼ばれる。

- [V. Fock](#), Z.Phys. 98, 145-154 (1935). などでのこの言葉が出てくる。

- ❖ しかしながら、この背後にはポテンシャルの空間的な対称性からは簡単に予測できない高い対称性が隠れているはず！

一般的に「**力学的対称性**」と呼ばれる。

縮退度の重要性

周期表の構造やオクテット則は水素原子の縮退度と関連がある。

Periodic Table

The periodic table includes the following legend and classification blocks:

Legend:

- electrons per shell: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18
- atomic number (Z): 1111K, 1111, 1111
- name: element, symbol
- melting point (K): 1111K, 1111
- first ionization energy (kJ/mol): 1111, 1111
- density (g/cm³): 1111, 1111
- electronegativity: 1111, 1111
- oxidation states: +1, -1
- electron configuration: 1s¹, 1s²
- standard atomic weight (A): 1111, 1111
- Goldschmidt classification: 1111, 1111
- stable element: [atomic weight]
- unstable or radioactive element: [atomic weight]
- element: natural (black), synthetic (red)
- physical state: solid (X), fluid (X), gasses (X), not know state (X)
- chemical properties: strongly acid oxide (red), mildly acid oxide (orange), weakly acid oxide (yellow), neutral oxide (green), weakly basic oxide (light blue), mildly basic oxide (blue), strongly basic oxide (dark blue), amphoteric oxide (purple)
- other properties: Lit (lithophile), Cal (calchophile), Sid (siderophile), Atm (atmophile), Syn (synthetie)

Classification Blocks:

- s-block (with Helium):** Alkali metals (probable), Alkaline earth metals (probable)
- f-block:** Actinides, REE (Lanthanides), REE = Rare Earth Elements
- d-block:** Transition metals (probable), REE, Precious metals
- p-block (without Helium):** Metalloids (probable), Post-transition metals (probable), Non metals (Polyatomic, Diatomic, Noble gas)

本日のスタイル

- ★古典力学の視点や幾何学的な視点を交えて理解を深める。
- ★二つの手法（「物理的な」LRLベクトルを用いる手法と「幾何学的な」LRLベクトルを用いる手法）によって $so(4,2)$ 代数構造の構成までたどり着くことを目標とする。スライドの左上に「物」と「幾」のマークをつけている。
- ◎「物理的な」、「幾何学的な」の接頭辞は世の中では区別がされていないので便宜上つけたものです。

力学的対称性

動機

- ❖ 水素原子の高度な縮退に対応する力学的対称代数を二種類の方法で構築する。
- ❖ 物理的なLRLベクトルを用いる方法。
- ❖ 幾何学的なLRLベクトルを用いる方法。

力学的対称性のきっかけは古典力学

❖ 力学の創設時より、クーロンポテンシャルと調和振動ポテンシャルは特別な球対称ポテンシャルだと考えられていた。

- Newton, "Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica" (1687). Prop X, XI.

❖ 例. [Bertrand の定理](#) : 全ての束縛軌道が閉軌道となる球対称性のポテンシャルはクーロンあるいは調和振動のポテンシャルに限られる。

- [J. Bertrand](#), C. R. Math. Acad. Sci. Paris 77, 849853 (1873) .

❖ 例. [Laplace-Runge-Lenz \(LRL\) ベクトル](#) : クーロンポテンシャルで保存される。

- [J. Hermann](#) (1710). "Unknown title". Giornale de Letterati D'Italia. **2**: 447–467. 等

❖ 例. Jauch-Hill-Fradkin テンソル : 調和振動のポテンシャルで保存される。

- J.M.Jauch and E.L.Hill, Phys.Rev. 57, 641-645 (1940). 等

物理的なLRLベクトルを用いる手法

古典力学版LRLベクトル

❖ 何度か再発見されている。

- [J. Hermann](#) (1710). Giornale de Letterati D'Italia. **2**: 447–467.
- [J. Bernoulli](#) (1710). Histoire de l'academie royale des sciences (Paris). **1732**: 521–544.
- [Laplace](#) (1799). Traité de mécanique celeste. Tome I, Premiere Partie, Livre II, pp.165ff.
- [C. Runge](#) (1919). Vektoranalysis. I. Leipzig: Hirzel.

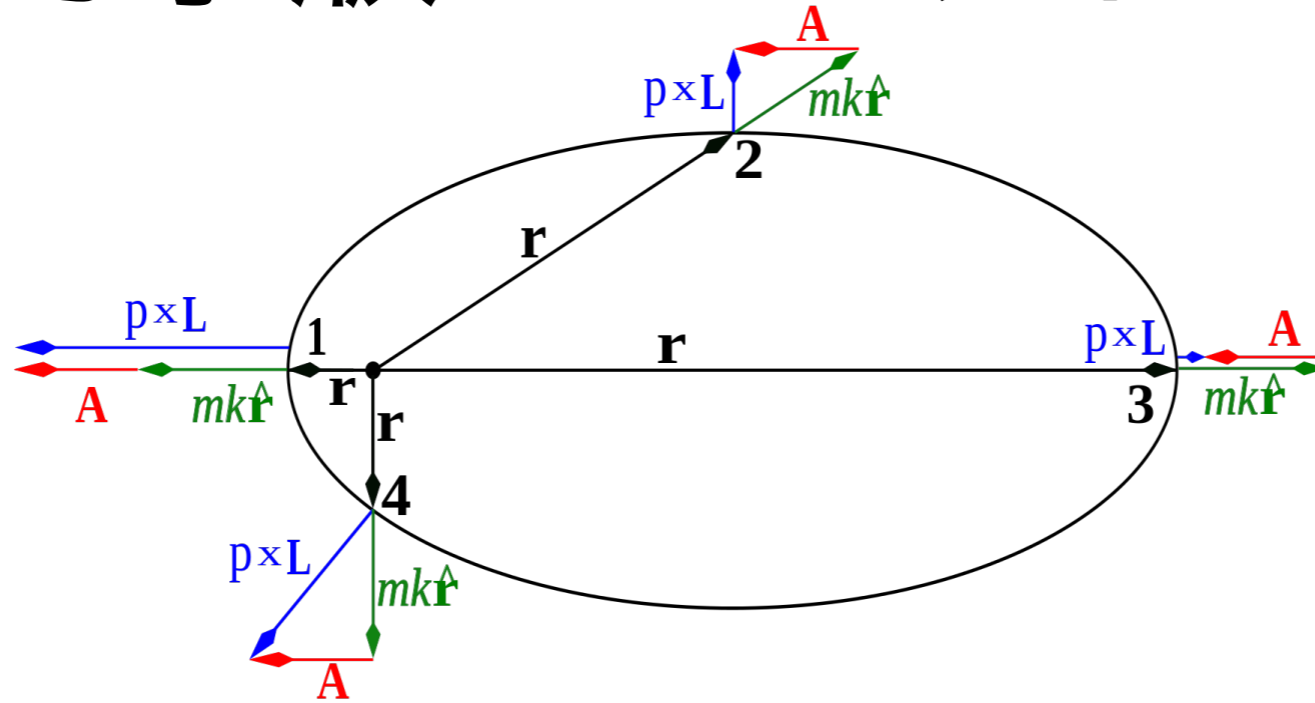
$$\mathbf{M} = \frac{1}{m_e} \mathbf{p} \times \mathbf{L} - \frac{\kappa}{r} \mathbf{r} \quad (\text{LRLベクトルの定義})$$

$$\{\mathbf{M}, H\} = 0 \quad (\text{LRLベクトル保存則})$$

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{M} = 0 \quad (\text{角運動量ベクトルとの直交性})$$

$$e = \frac{|\mathbf{M}|}{\kappa} = \sqrt{\frac{2HL^2}{\kappa^2 m_e} + 1} \quad (\text{離心率との関係})$$

古典力学版LRLベクトルの意味



https://en.wikipedia.org/wiki/File:Laplace_Runge_Lenz_vector.svg

- ❖ Mの方向は近日点の方向を与える。
- ❖ Mの保存 = 近日点の固定。閉軌道を表す。
- ❖ 近日点を指す方位角はエネルギーや角運動量と独立な運動の積分。つまり全部で5個の独立な積分
- ❖ 積分が $2n-1$ となるとき**最大超可積分系**と呼ばれ、このとき束縛状態が閉軌道をなす。(Bertrandの定理に関連)

量子力学版LRLベクトル

❖ 古典版LRLのエルミート演算子化で得られる。

- [W. Lenz](#) (1924). *Zeitschrift für Physik*. **24**: 197–207.等

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2m_e}(\mathbf{p} \times \mathbf{L} - \mathbf{L} \times \mathbf{p}) - \frac{\kappa}{r}\mathbf{r} \quad (\text{LRLベクトルの定義})$$

$$[\mathbf{M}, H] = 0 \quad (\text{LRLベクトル保存則})$$

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{M} = 0 \quad (\text{角運動量ベクトルとの直交性})$$

$$[L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k$$

$$[L_i, M_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}M_k$$

$$[M_i, M_j] = -2i\hbar\frac{H}{m_e}\epsilon_{ijk}L_k$$

} 交換関係

リー代数が作れそう？

物 表現空間の制限と有限次元リー代数

❖ 角運動量ベクトルとLRLベクトルは、そのままの形では有限次元リー代数を成さない。無限次元Kac-Moody代数の一種となる。

- J.Daboul, [P.Slodowy](#) and C.Daboul, Phys. Lett. B 317 321-328 (1993).

❖ 表現空間をエネルギーが一定 ($H=E$) となる固有空間に制限すると (保存則がこの操作を許す)、その空間に作用する限りは角運動量ベクトルとLRLベクトルは有限次元リー代数 ($\dim g=6$) をなす。

- [W.Pauli](#), Jr., Z. Physik 36, 336-363 (1926).

$$[L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k$$

$$[L_i, M_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}M_k$$

$$[M_i, M_j] = -2i\hbar\frac{E}{m_e}\epsilon_{ijk}L_k$$

束縛状態 ($E < 0$) におけるリー代数

❖ LRLベクトルのスケール変更を行う。

$$\tilde{M} = \sqrt{\frac{m_e}{2|E|}} M$$

❖ 交換関係は次のようになる。

$$[L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k, [L_i, \tilde{M}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\tilde{M}_k, [\tilde{M}_I, \tilde{M}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k$$

❖ 角運動量ベクトルとスケール変更したLRLベクトルは**力学的対称代数so(4)**の基底となる。

$$\hat{L}_{23} := L_1, \hat{L}_{31} := L_2, \hat{L}_{12} := L_3, \hat{L}_{14} := \tilde{M}_1, \hat{L}_{24} := \tilde{M}_2, \hat{L}_{34} := \tilde{M}_3$$

$$[\hat{L}_{ij}, \hat{L}_{kl}] = i\hbar(\delta_{ik}\hat{L}_{jl} - \delta_{il}\hat{L}_{jk} - \delta_{jk}\hat{L}_{il} + \delta_{jl}\hat{L}_{ik})$$

力学的対称代数まとめ

❖ 実は各エネルギー状態に対して対称代数が定まる。

(1) エネルギー一定 $E < 0$ (束縛状態、古典軌道は楕円型)

$$[\tilde{M}_i, \tilde{M}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k$$

(2) エネルギー一定 $E = 0$ (中間状態、古典軌道は放物型)

$$[M_i, M_j] = 0$$

(3) エネルギー一定 $E > 0$ (散乱状態、古典軌道は双曲軌道型)

$$[\tilde{M}_i, \tilde{M}_j] = -i\hbar\epsilon_{ijk}L_k$$

力学的対称代数まとめ

❖ 実は各エネルギー状態に対して対称代数が定まる。

(1) エネルギー一定 $E < 0$ (束縛状態、古典軌道は楕円型)

$$[\tilde{M}_i, \tilde{M}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k$$

so(4)代数

4次元回転群SO(4)

(2) エネルギー一定 $E = 0$ (中間状態、古典軌道は放物型)

$$[M_i, M_j] = 0$$

iso(3)代数

3次元ユークリッド群ISO(3)

(3) エネルギー一定 $E > 0$ (散乱状態、古典軌道は双曲軌道型)

$$[\tilde{M}_i, \tilde{M}_j] = -i\hbar\epsilon_{ijk}L_k$$

so(3,1)代数

3+1次元ローレンツ群SO(3,1)

幾何学的なLRLベクトルを用いる手法

- [V. Fock](#), Z.Phys. 98, 145-154 (1935).
- [V. Bargmann](#), Z.Phys. 99, 576-582 (1936).
- M. Bander, [C. Itzykson](#), Rev. Mod. Phys. **38**: 330–345. (1966).

をベースに記述する。

Fockの方法

D次元水素様原子の非相対論的Schrödinger方程式を考える。(束縛状態 $E < 0$)

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla^2 - \frac{\kappa}{r} \right] \Psi(\mathbf{r}) = E \Psi(\mathbf{r})$$

波動関数を運動量表示 (Fourier変換) する。

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(\mathbf{p}) &:= F[\psi(\mathbf{x})](\mathbf{p}) \\ &:= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{D}{2}}} \int_{\mathbf{R}^D} d\mathbf{x} \psi(\mathbf{x}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \mathbf{x} \cdot \mathbf{p}\right) \end{aligned}$$

Schrödinger方程式の運動量表示を得る。

$$\left\{ \frac{\mathbf{p}^2}{2m_e} - E \right\} \tilde{\psi}(\mathbf{p}) = \frac{\kappa}{\pi S_{D-2} \hbar} \int_{\mathbf{R}^D} d\mathbf{p}' \frac{\tilde{\psi}(\mathbf{p}')}{|\mathbf{p} - \mathbf{p}'|^{D-1}}$$

D次元空間の超球面 S^{D-1} の面積は以下のようになる。

$$S_{D-1} = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}$$

Fockの方法

エネルギーを書き換えると次の式を得る。

$$p_0^2 = -2m_e E < 0$$

$$(\mathbf{p}^2 + p_0^2)\tilde{\psi}(\mathbf{p}) = \frac{2m_e \kappa}{\pi S_{D-2} \hbar} \int_{\mathbf{R}^D} d\mathbf{p}' \frac{\tilde{\psi}(\mathbf{p}')}{|\mathbf{p} - \mathbf{p}'|^{D-1}}$$

この時点で式を少し分析してみよう。

右辺は積分核 $K(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ と波動関数の畳み込み積分である。

$$(\mathbf{p}^2 + p_0^2)\tilde{\psi}(\mathbf{p}) = \int_{\mathbf{R}^D} d\mathbf{p}' \psi(\mathbf{p}') K(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$$

これは関数 ψ に対して畳み込み積分操作を行う演算子を作用させた場合の固有値が

$$\mathbf{p}^2 + p_0^2$$

となっている固有値問題として解釈可能である。

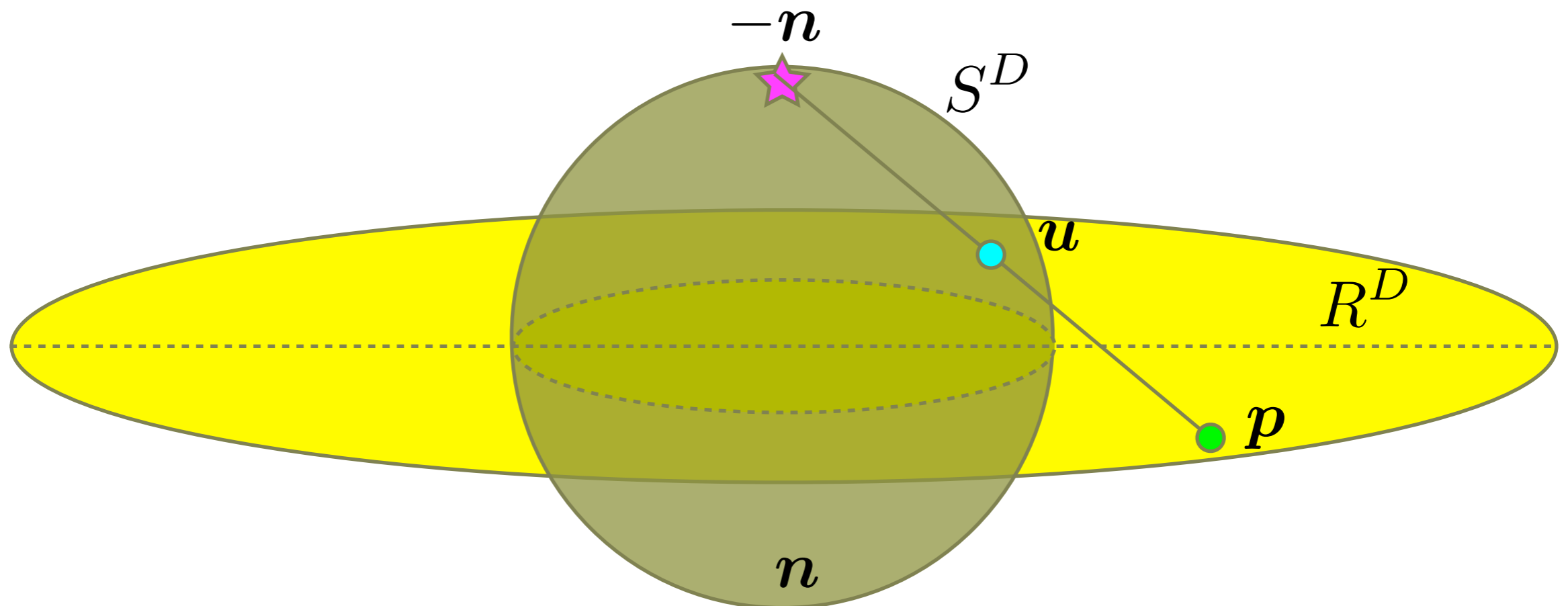
Fockの方法

- ❖ 立体射影により 超球面上のFourier解析の問題になる。
- ❖ 新たな軸 \mathbf{n} が導入されて次元が一つ上がるように見える。

$$\mathbf{u} = \frac{p_0^2 - \mathbf{p}^2}{p_0^2 + \mathbf{p}^2} \mathbf{n} + \frac{2p_0}{p_0^2 + \mathbf{p}^2} \mathbf{p}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{0}) = \mathbf{n}$$

$$\mathbf{u}(\infty) = -\mathbf{n}$$



Fockの方法

測度は以下のように変換される。

$$d\Omega_D = \left(\frac{2p_0}{p^2 + p_0^2} \right)^D dp$$

p' の変数変換

$$\mathbf{u}' = \frac{p_0^2 - p'^2}{p'^2 + p_0^2} \mathbf{n} + \frac{2p_0}{p'^2 + p_0^2} p'$$

を用いると、

$$|\mathbf{p} - \mathbf{p}'|^2 = \frac{(p^2 + p_0^2)(p'^2 + p_0^2)}{(2p_0)^2} |\mathbf{u} - \mathbf{u}'|^2$$

となりSchrödinger方程式は

$$(p^2 + p_0^2)\tilde{\psi}(\mathbf{p}) = \frac{2m_e\kappa}{\pi S_{D-2}\hbar} \int_{S^D} d\Omega'_D \left(\frac{p_0^2 + p'^2}{2p_0} \right)^D \frac{1}{|\mathbf{u} - \mathbf{u}'|^{D-1}} \frac{(2p_0)^{D-1}}{(p_0^2 + p^2)^{\frac{D-1}{2}} (p_0^2 + p'^2)^{\frac{D-1}{2}}} \tilde{\psi}(\mathbf{p}')$$

となる。

Fockの方法

波動関数を次のように書き直すと、

$$\Psi(\mathbf{u}) = \sqrt{\frac{S_D}{p_0}} \left(\frac{p_0^2 + p^2}{2p_0} \right)^{\frac{D+1}{2}} \tilde{\psi}(\mathbf{p})$$

Schrödinger方程式は以下のようになる。

$$\Psi(\mathbf{u}) = \frac{2m_e\kappa}{2p_0\pi S_{D-2}\hbar} \int_{S^D} d\Omega_D(\mathbf{u}') \frac{\Psi(\mathbf{u}')}{|\mathbf{u} - \mathbf{u}'|^{D-1}}$$

グリーン関数方程式

$$\Delta_{\mathbf{u}, R^{D+1}} G(\mathbf{u} - \mathbf{u}') = -\delta(\mathbf{u} - \mathbf{u}')$$

を満たすグリーン関数

$$G(\mathbf{u} - \mathbf{u}') = \frac{1}{(D-1)S_D |\mathbf{u} - \mathbf{u}'|^{D-1}}$$

を用いると、

$$\Psi(\mathbf{u}) = \frac{2m_e\kappa}{p_0\hbar} \int_{S^D} d\Omega(\mathbf{u}') \Psi(\mathbf{u}') G(\mathbf{u} - \mathbf{u}')$$

という S^D 上の関数の固有値問題に帰着する。

Fockの解法

固有値問題

$$f(\mathbf{u}) = \lambda \int_{S^D} d\Omega(\mathbf{u}') f(\mathbf{u}') G(\mathbf{u} - \mathbf{u}')$$

を考える。この固有関数が高次元球面調和関数となることを以下に示す。

高次元球面調和関数は[Laplace-Beltrami演算子](#)の固有関数である。

$$\Delta_{S^D} Y_{n\alpha}(\mathbf{u}) = -n(n + D - 1) Y_{n\alpha}(\mathbf{u})$$

Laplace-Beltrami演算子はLaplacianの球面成分である。

$$\Delta_{\mathbf{u}, \mathbf{R}^{D+1}} = \frac{1}{u^D} \frac{\partial}{\partial u} \left(u^D \frac{\partial}{\partial u} \right) + \frac{\Delta_{S^D}}{u^2}$$

Laplace-Beltrami演算子の固有値を同じくする固有関数が張る関数空間が定義できるが、超球面上の関数はこれらの関数空間の可算無限直和で表される。

$$L^2(S^D, d\Omega_D) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n$$

$$\dim \mathcal{H}_n = {}_{n+D}C_n - {}_{n+D-2}C_{n-2}$$

これは高次元の**Fourier級数展開**に他ならない。

Fockの解法

Gegenbauer多項式を母関数のテーラー展開により定義する。

$$\frac{1}{(1 - 2xt + t^2)^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^\alpha(x) t^n$$

上記展開式より、

$$G(\mathbf{u} - \mathbf{u}') = \frac{1}{(D-1)S_D} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{\frac{D-1}{2}}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}')$$

が成立する。

ここでGegenbauer多項式より定義される $C_n(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}')$ という関数は[帯球関数](#)と呼ばれる。

帯球関数 C_n の著しい性質は[再生核](#)となることである。

すなわち、 $Y \in \mathcal{H}_m$ に対して、

$$\delta_{mn} Y(\mathbf{u}) = \frac{\dim \mathcal{H}_n}{C_n^{\frac{D-1}{2}}(1) S_D} \int_{S^D} d\Omega(\mathbf{u}') Y(\mathbf{u}') C_n^{\frac{D-1}{2}}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}')$$

となることである。

Fockの解法

以下の関係式を用いると、

$$\dim \mathcal{H}_n = {}_{n+D}C_n - {}_{n+D-2}C_{n-2} = \frac{(D+2n-1)(D+n-2)!}{(D-1)!n!}$$

$$C_n^{\frac{D-1}{2}}(1) = {}_{D+n-2}C_n = \frac{(D+n-2)!}{n!(D-2)!}$$

$Y \in \mathcal{H}_m$ に対して、

$$\delta_{mn} Y(\mathbf{u}) = \frac{(D+2n-1)}{(D-1)S_D} \int_{S^D} d\Omega(\mathbf{u}') Y(\mathbf{u}') C_n^{\frac{D-1}{2}}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}')$$

となる。

グリーン関数が全ての次数の帯球関数を含むことを考慮すると、

$Y \in \mathcal{H}_m$ に対して、

$$Y(\mathbf{u}) = (D+2n-1) \int_{S^D} d\Omega(\mathbf{u}') Y(\mathbf{u}') G(\mathbf{u} - \mathbf{u}')$$

となる。 $L^2(S^D, d\Omega_D) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n$ では球面調和関数は完全直交基底となるので、このヒルベルト空間では固有値・固有関数の組はこれらに限られる。

(cf. [Peter-Weylの定理](#))

Fockの解法

以上より

$$\frac{2m_e\kappa}{p_0\hbar} = (D + 2n - 1)$$

を得る。

D次元水素様原子の非相対論的束縛状態エネルギースペクトルは

$$E = -\frac{1}{2} \frac{1}{\left(\frac{2n+D-1}{2}\right)^2} \frac{m_e}{\hbar^2} \kappa^2$$

縮重度は

$$\dim\mathcal{H}_n = {}_{n+D}C_n - {}_{n+D-2}C_{n-2} = \frac{(D+2n-1)(D+n-2)!}{(D-1)!n!}$$

となる。

幾何学的LRLベクトルの導入

❖ LRLベクトルは次のように書き換えることが可能である。

$$M = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2m_e} (\mathbf{x}p^2 - 2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{p})\mathbf{p}) + xH \right\} + \text{h.c.}$$

❖ 幾何学的LRLベクトルを導入する。一般にはこれもLRLベクトルと呼ばれるが、本来は別物である。

$$M(E) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2m_e} (\mathbf{x}p^2 - 2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{p})\mathbf{p}) + xE \right\} + \text{h.c.}$$

❖ さらに次のように規格化したベクトルを用意する。

$$M_{>}(|E|) = \sqrt{\frac{m_e}{2|E|}} M(|E|), \quad M_{<}(-|E|) = \sqrt{\frac{m_e}{2|E|}} M(-|E|)$$

幾何学的な方法 (Bargmannの解釈)

❖ 超球面 S^3 上の角運動量演算子は $\mathfrak{so}(4)$ 代数をなす。

$$L_{ij}^{(u)} = -i\hbar \left(u_i \frac{\partial}{\partial u_j} - u_j \frac{\partial}{\partial u_i} \right) \quad i,j=1,2,3$$

$$L_{i4}^{(u)} = -i\hbar \left(u_i \frac{\partial}{\partial u_4} - u_4 \frac{\partial}{\partial u_i} \right)$$

❖ これらに対して次の変換を行う。実は幾何学的LRLベクトルと結びつけることができる。

$$(p_0^2 + p^2)^{-2} L_{ij}^{(u)} (p_0^2 + p^2)^2 = L_{ij}$$

$$(p_0^2 + p^2)^{-2} L_{i4}^{(u)} (p_0^2 + p^2)^2 = -M_{<}(-|E|) =: -L_{i4}$$

❖ 変換後もやはり $\mathfrak{so}(4)$ 代数をなす。

$$[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] = i\hbar(\delta_{\mu\rho}L_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma}L_{\nu\rho} - \delta_{\nu\rho}L_{\mu\sigma} + \delta_{\nu\sigma}L_{\mu\rho})$$

幾何学的な方法まとめ

❖ 実は各状態について力学的対称代数を構成できる。

(1) エネルギー一定 $E < 0$ (束縛状態、古典軌道は楕円型)

$$[M_{<,i}(-|E|), M_{<,j}(-|E|)] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k$$

so(4)代数
4次元回転群SO(4)

(2) エネルギー一定 $E = 0$ (中間状態、古典軌道は放物型)

$$[M_i(0), M_j(0)] = 0$$

iso(3)代数
3次元ユークリッド群ISO(3)

(3) エネルギー一定 $E > 0$ (散乱状態、古典軌道は双曲軌道型)

$$[M_{>,i}(|E|), M_{>,j}(|E|)] = -i\hbar\epsilon_{ijk}L_k$$

so(3,1)代数
3+1次元ローレンツ群SO(3,1)

考察

- ❖ ここまででわかったこと：二種類のLRLベクトルを用いて力学的対称代数を構成できる。
- ❖ 両方法で構成されるリー代数は同型であった。
- ❖ ここまででわからないこと①：エネルギー符号が異なる時の力学的対称代数の関係性が不明確。
- ❖ ここまででわからないこと②：異なるエネルギーを持つ状態間の関係についても理解が不明確。
- ❖ ここまででわからないこと③：なぜ二つの方法で同型なリー代数が構成されるのか？

力学的群その1

動機

- ❖ Eの符号によって異なっていた力学的対称代数の統一理論の構築。
- ❖ この構築は幾何学的なLRLベクトルを用いるものである。

共形変換代数の導入

❖ 次の演算子は3次元運動量空間上の（エルミート化）[共形変換代数](#)をなす。

★ 回転演算子

$$L_{ij} = p_j x_i - p_i x_j = i\hbar \left(-p_i \frac{\partial}{\partial p_j} + p_j \frac{\partial}{\partial p_i} \right)$$

★ 並進演算子

$$x_i = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_i}$$

★ スケール(dilation)演算子

$$D = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{2} + \text{h.c} = \frac{i\hbar}{2} \mathbf{p} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} + \text{h.c}$$

★ 特殊共形変換演算子

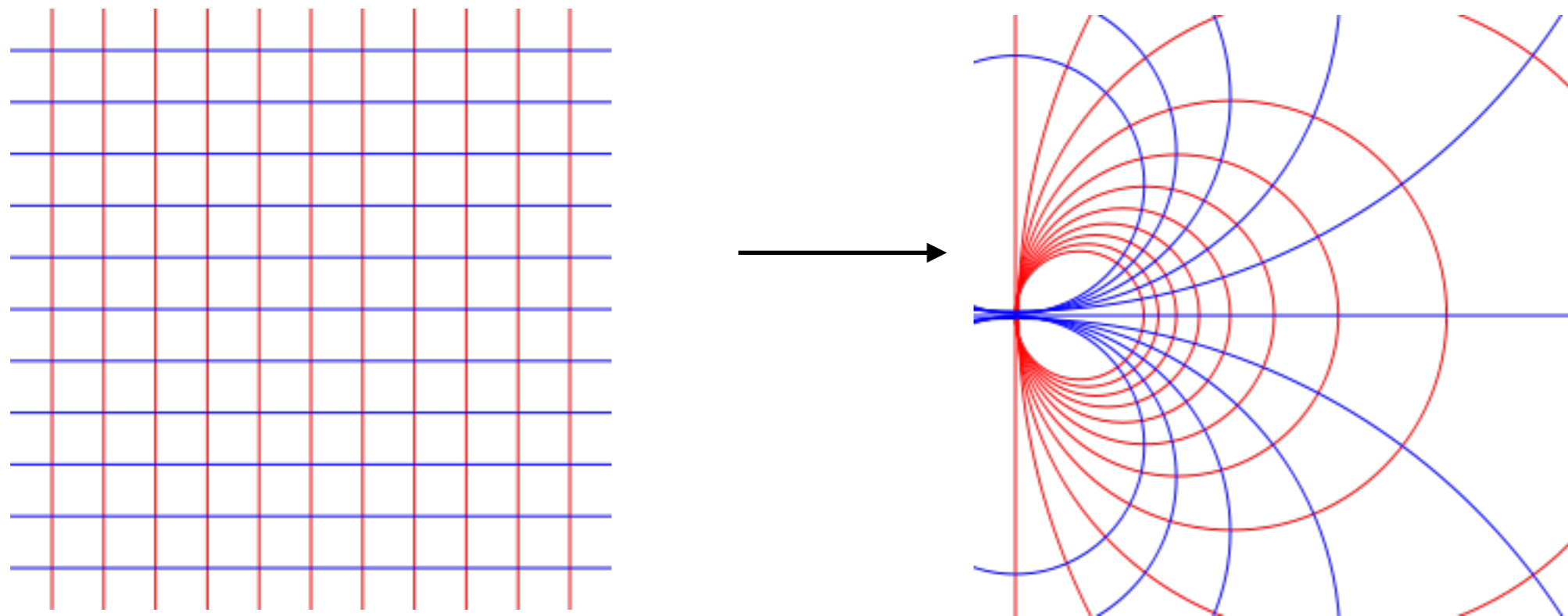
$$\begin{aligned} K_i &= \frac{1}{2} [p^2 x_i - 2p_i (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x})] + \text{h.c} \\ &= \frac{i\hbar}{2} \left[p^2 \frac{\partial}{\partial p_i} - 2p_i \left(\mathbf{p} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) \right] + \text{h.c} \end{aligned}$$

	L (回転)	x (並進)	D (スケール)	K (特殊共形変換)
so(3)代数	→			
iso(3)代数	→	→		
スケール不変代数	→	→	→	
共形変換代数	→	→	→	→

特殊共形変換について

特殊共形変換の正体は並進と反転を合成したものの
 反転演算子 $I : p \mapsto p/p^2$ $K_\mu = \frac{1}{2}Ix_\mu I + \text{h.c.}$

二次元の場合 (いわゆる メビウス変換)



上 https://en.wikipedia.org/wiki/File:Conformal_grid_before_Möbius_transformation.svg

下 https://en.wikipedia.org/wiki/File:Conformal_grid_after_Möbius_transformation.svg

幾 共形変換代数のde Sitter空間回転表現

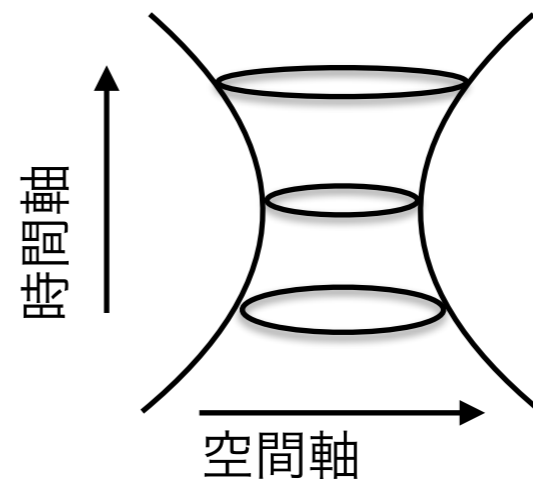
❖ 共形変換代数の基底変換を行う。

$$L_{45} = D \quad L_{i5} = \frac{1}{2} (aK_i + a^{-1}x_i) \quad L_{i4} = \frac{1}{2} (aK_i - a^{-1}x_i)$$

❖ de Sitter回転群SO(4,1)に対するリー代数と同型である。**回転表現**と呼ぶ。空間軸と時間軸が一つずつ増えたように見える。

$$[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] = i\hbar(\eta_{\mu\rho}L_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}L_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}L_{\mu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}L_{\mu\rho})$$
$$\eta = \text{diag}(1, 1, 1, 1, -1) \quad L_{\mu\nu} = -L_{\nu\mu}$$

[de Sitter空間](#)の模式図



幾何学的LRLベクトルと共形変換代数

❖ 共形変換代数に幾何学的LRLベクトルは含有される。

$$\boldsymbol{x} = \sqrt{\frac{1}{2m_e|E|}} (\boldsymbol{M}_>(|E|) - \boldsymbol{M}_<(-|E|))$$

$$\boldsymbol{K} = 2m_e\boldsymbol{M}(0) = \sqrt{2m_e|E|} (\boldsymbol{M}_>(|E|) + \boldsymbol{M}_<(-|E|))$$

❖ 幾何学的LRLベクトルは共形変換代数の回転表現とみなせる。

$$L_{i5} = \frac{1}{2} (aK_i + a^{-1}x_i) \quad L_{i4} = \frac{1}{2} (aK_i - a^{-1}x_i) \quad \text{において、}$$

$$a = \sqrt{\frac{1}{2m_e|E|}} \quad \text{とすると、}$$

$$L_{i4} = M_{<,i}(-|E|), \quad L_{i5} = M_{>,i}(|E|) \quad \text{となる。}$$

考察

- ❖ ここまででわかったこと：エネルギーの符号が異なる時の力学的対称性の代数の関係性。それらの対称代数を統一する代数を構築できる。この代数は運動量空間上の共形変換代数である。
- ❖ ここまででわからないこと：異なるエネルギーを持つ状態間の関係については未だ理解が不明確。

スペクトル生成代数

動機

- ❖ 水素原子の異なるエネルギーの状態間の関係を明らかにする代数=スペクトル生成代数を構築したい。
- ❖ LRLベクトルとは関係のない代数である。

動径部分のSchrödinger方程式の書き換え

❖ Schrödinger方程式の書き換え

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\mathbf{L}^2}{\hbar^2 r^2} + \frac{2\kappa m_e}{r \hbar^2} + 2E \frac{m_e}{\hbar^2} \right] \Psi(\mathbf{r}) = 0$$

❖ 変数分離 $\Psi(\mathbf{r}) = Y_{lm}(\theta, \phi) R_l(r)$ の導入

$$\left[r \frac{d^2}{dr^2} + 2 \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r} + 2\kappa \frac{m_e}{\hbar^2} + 2E \frac{m_e}{\hbar^2} r \right] R_l(r) = 0$$

❖ 動径部分方程式の書き換え ($E < 0$)

$$\beta^2 = \frac{\kappa^2 m_e}{2|E| \hbar^2} \quad \alpha^2 = 2|E| \frac{m_e}{\hbar^2} = \left(\frac{m_e \kappa}{\beta \hbar^2} \right)^2 \quad \psi_l(t) = t^{\frac{1}{2}} R_l(t/\alpha) \quad t = \alpha r$$

$$\frac{1}{2} \left[-t \frac{d^2}{dt^2} - \frac{d}{dt} + \frac{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2}{t} + t \right] \psi_l(t) = \beta \psi_l(t)$$

動径部分固有方程式 ($E < 0$) に潜む代数構造

❖ 演算子 N_0 を導入するとの固有方程式は次のようになる。

$$N_0 = \frac{1}{2} \left[-t \frac{d^2}{dt^2} - \frac{d}{dt} + \frac{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2}{t} + t \right]$$

$$N_0 \psi_l(t) = \beta \psi_l(t)$$

❖ 演算子 N_+ , N_- を導入すると次の交換関係が成立する。

$$N_{\pm} = \frac{1}{2} \left[-t \frac{d^2}{dt^2} - \frac{d}{dt} + \frac{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2}{t} - t \pm 2t \frac{d}{dt} \pm 1 \right]$$

$$[N_0, N_{\pm}] = \pm N_{\pm}, [N_+, N_-] = -2N_0$$

❖ この代数は **スペクトル生成代数** と呼ばれる。(Fock 1935)

❖ 対応するリー群は位相空間としては **ノンコンパクト** である。

スペクトル生成代数 $su(1,1)$ の既約ユニタリ表現

❖ 演算子 N_1, N_2 を導入すると N_0, N_1, N_2 は、 $su(1,1)$ 代数を構成する。 N_+ (N_-) は上昇 (下降) 演算子である。

$$N_1 \pm iN_2 = N_{\pm} \quad [N_1, N_2] = -iN_0, [N_0, N_1] = iN_2, [N_2, N_0] = iN_1$$

❖ $su(1,1)$ のカシミール演算子

$$C_{su(1,1)} = N_0^2 - \frac{1}{2}(N_+N_- + N_-N_+)$$

❖ 既約ユニタリ表現は **無限次元** で離散スペクトルを与える。

- [V. Bargmann](#), *Annals of Mathematics*, Second Series, **48**: 568–640 (1947). 等

$$C_{su(1,1)}|k, m'\rangle = k(k-1)|k, m'\rangle \quad 2k \in \mathbb{Z}_{>0}$$

$$N_0|k, m'\rangle = (k+m')|k, m'\rangle \quad m' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

❖ 上昇演算子は固有状態を次々と生成することができる。

$$|k, m'\rangle = \sqrt{\frac{\Gamma(2k)}{m'!\Gamma(2k+m')}} (N_+)^{m'} |k, 0\rangle$$

su(1,1)代数のユニタリ表現論を用いた解法

- ❖ カシミール演算子は期待通り一定値を取る。許される既約ユニタリ表現は角運動量量子数 l により定まる。

$$C_{\text{su}(1,1)} = N_0^2 - \frac{1}{2} (N_+ N_- + N_- N_+) = l(l+1)$$

- ❖ β は N_0 の固有値であるが、su(1,1)ユニタリ表現論の帰結として $l+1$ 以上の整数であることが要求される。以後 β を N と書く。これは主量子数に他ならない。

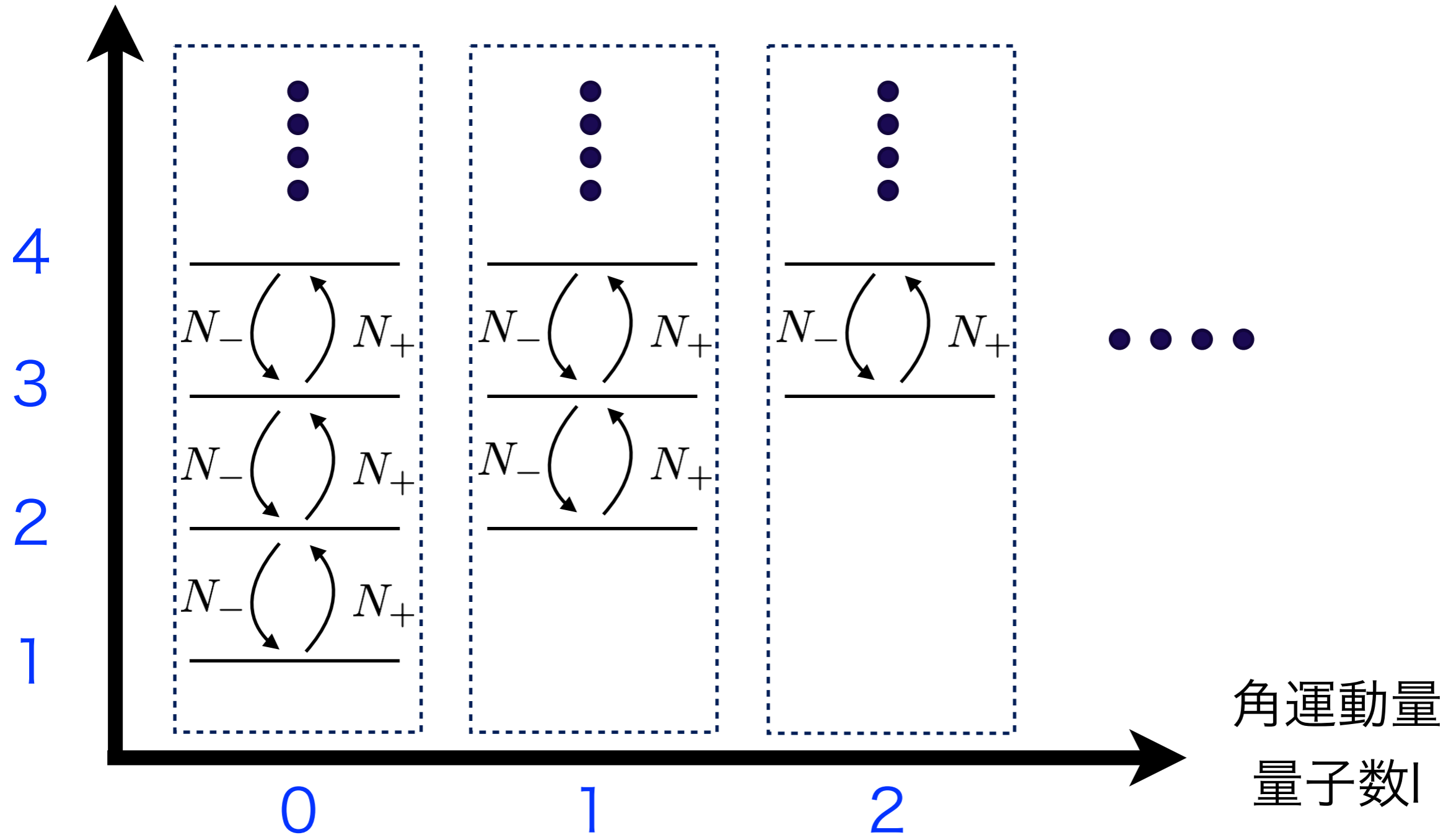
$$N_0 \psi_l(t) = \beta \psi_l(t)$$

$$C_{\text{su}(1,1)} |l+1, N-l-1\rangle = l(l+1) |l+1, N-l-1\rangle$$

$$N_0 |l+1, N-l-1\rangle = N |l+1, N-l-1\rangle$$

準位図とスペクトル生成代数

主量子数N



★各枠内を $su(1,1) \times so(3)$ の既約部分空間と見ることが出来る。

各状態の固有値問題の $su(1,1)$ 表現

- ❖ 実は各状態の固有値問題を $su(1,1)$ の演算子で表現できる。
- ❖ 各演算子から生成されるリー部分群の型は古典軌道の型と同じ。
- ✓ 古典軌道の型とリー部分群の型の関係は今後明らかにしたい。

(1) $E < 0$ (束縛状態、楕円軌道)

$$N_0\psi_l(t) = \beta\psi_l(t)$$

対応する部分リー群は楕円型
離散スペクトルを与える。

(2) $E = 0$ (中間状態、放物軌道)

$$\frac{1}{2}(N_0 + N_1)\psi_l(t) = \psi_l(t)$$

対応する部分群は放物型

固有値が1となる状態

(3) $E > 0$ (散乱状態、双曲軌道)

$$N_1\psi_l(t) = \beta\psi_l(t)$$

対応する部分群は双曲型

連続スペクトルを与える。

◎ (1) は正則離散スペクトル系列と呼ばれる。(2) や (3) のユニタリ表現を考えるには一般化スペクトルを考える必要がある

- G. LINDBLAD, B. NAGEL, Ann. Inst. Henri Poincaré 13 (1970).に解法がある。

考察

- ❖ 疑問：スペクトル生成代数 $su(1,1)$ は力学的対称代数（あるいはそれを組み込んだ共形変換代数 $so(4,1)$ ）に含まれるか？
- ❖ 答え：否
- ❖ 理由：スペクトル生成代数 $su(1,1)$ の各演算子はすべての角運動量演算子と可換である。角運動量演算子と可換となるような $so(4,1)$ の元は L_{45} （のスカラー倍）しか有りえない。角運動量演算子と可換となる演算子から次元が3のリー代数である $su(1,1)$ を構成することはできない。

力学的群その2

動機

❖ 共形変換代数とスペクトル生成代数を組み込んだ $so(4,2)$ を構成する。(幾何学的なLRLベクトル)

- Wulfman, Carl E. "Dynamical Symmetry." World Scientific (2010).を参考

❖ 物理的なLRLベクトルを用いて、 $so(4,2)$ を構成する。

- B. G. Wybourne, Continuous Symmetries with Examples(1999).を参考

スペクトル生成代数の書き換え

❖ 次の置換を行うと角運動量量子数 l の制限が解かれ、作用するヒルベルト空間は元に戻る。(Eの符号で場合分けは必要)

$$l(l+1) = \frac{L^2}{\hbar^2}$$

❖ さらに次の変換を導入する。

$$\tilde{N}_i = \hbar r^{-\frac{1}{2}} N_i r^{\frac{1}{2}}$$

$$\tilde{N}_0 = \frac{r}{2} (ap^2 + a^{-1}) \quad \tilde{N}_1 = \frac{r}{2} (ap^2 - a^{-1}) \quad a = \sqrt{\frac{1}{2m_e|E|}}$$

$$\tilde{N}_2 = \frac{1}{2} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + i\hbar) = L_{45} + \frac{i\hbar}{2} \leftarrow \text{スケール演算子になっている。}$$

❖ 依然として $\text{su}(1,1)$ の代数を構成できる。

$$[\tilde{N}_1, \tilde{N}_2] = -i\hbar\tilde{N}_0, \quad [\tilde{N}_0, \tilde{N}_1] = i\hbar\tilde{N}_2, \quad [\tilde{N}_2, \tilde{N}_0] = i\hbar\tilde{N}_1$$

共形変換代数の書き換え

❖ 次の変換を行う。

$$\begin{aligned}\tilde{L}_{ij} &= L_{ij} & \tilde{L}_{45} &= L_{45} + \frac{i\hbar}{2} = \tilde{N}_2 \\ \tilde{L}_{i4} &= L_{i4} - \frac{i\hbar a}{2} p_i & \tilde{L}_{i5} &= L_{i5} - \frac{i\hbar a}{2} p_i\end{aligned}$$

❖ 依然として共形変換代数 $\mathfrak{so}(4,1)$ を構成できる。

❖ これは p と K が回転操作 L とスケール操作 D に対して同じ変換をすることに由来する。

$$\begin{aligned}[\tilde{L}_{\mu\nu}, \tilde{L}_{\rho\sigma}] &= i\hbar(\eta_{\mu\rho}\tilde{L}_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}\tilde{L}_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}\tilde{L}_{\mu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}\tilde{L}_{\mu\rho}) \\ \eta &= \text{diag}(1, 1, 1, 1, -1)\end{aligned}$$

❖ スペクトル生成代数のうち、 \tilde{N}_2 が組み込まれた。

スペクトル生成代数と共形変換代数の統一

- ❖ スペクトル生成代数 $su(1,1)$ と共形変換代数 $so(4,1)$ を部分リー代数に含む、大きなリー代数を考える。

$$so(4,1) \left\{ \begin{array}{l} \tilde{L}_{ij} = L_{ij} \quad \tilde{L}_{i4} = L_{i4} - \frac{i\hbar a}{2} p_i \quad \tilde{L}_{i5} = L_{i5} - \frac{i\hbar a}{2} p_i \\ \tilde{L}_{45} = L_{45} + \frac{i\hbar}{2} = \tilde{N}_2 \\ \tilde{L}_{56} = \tilde{N}_0 \quad \tilde{L}_{46} = \tilde{N}_1 \end{array} \right\} su(1,1)$$

$$\tilde{L}_{i6} = r p_i$$

- ❖ Anti de Sitter代数 $so(4,2)$ が構築できる。

$$[\tilde{L}_{\mu\nu}, \tilde{L}_{\rho\sigma}] = i\hbar(\eta_{\mu\rho}\tilde{L}_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}\tilde{L}_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}\tilde{L}_{\mu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}\tilde{L}_{\mu\rho})$$

$$\eta = \text{diag}(1, 1, 1, 1, -1, -1)$$

so(4,2)代数の部分代数に関する考察

(1)so(4) : E<0の時の力学的対称代数

基底 $\tilde{L}_{ij}, \tilde{L}_{i4}$ 不変量=主量子数 $\tilde{L}_{56} = \tilde{N}_0$

(2)iso(3) : E=0の時の力学的対称代数

基底 $\tilde{L}_{ij}, \frac{1}{2}(\tilde{L}_{i4} + \tilde{L}_{i5})$ 不変量=主量子数 $\frac{1}{2}(\tilde{L}_{46} + \tilde{L}_{56}) = \frac{1}{2}(\tilde{N}_0 + \tilde{N}_1)$

(3)so(3,1) : E > 0の時の力学的対称代数

基底 $\tilde{L}_{ij}, \tilde{L}_{i5}$ 不変量=主量子数 $\tilde{L}_{46} = \tilde{N}_1$

(4)su(1,1) : スペクトル生成代数

基底 $\tilde{L}_{45} = \tilde{N}_2$ 不変量=角運動量量子数 $C_{\text{so}(3)} = C_{\text{su}(1,1)} = L^2$
 $\tilde{L}_{56} = \tilde{N}_0$ 不変量=磁気量子数 $L_3 = \tilde{L}_{12}$
 $\tilde{L}_{46} = \tilde{N}_1$

もう一つのSO(4,2)

Jordan-Schwingerのボソン表現

❖ 一つのスピノール (su(2)のユニタリ表現ベクトル) は二種類のボソン生成演算子で表現可能。

- [P. Jordan](#), Z. Phys. 94, 531 (1935).
- [J. Schwinger](#), "On angular momentum," U.S. Atomic energy commission, NYO-3071, (1952).

$$|\tilde{l}, k\rangle = \frac{(a_1^\dagger)^{\tilde{l}-k} (a_2^\dagger)^{\tilde{l}+k}}{\sqrt{(\tilde{l}-k)! (\tilde{l}+k)!}} |0, 0\rangle$$

a_2^\dagger a_1^\dagger

	$k - \frac{1}{2}$	k	$k + \frac{1}{2}$
$\tilde{l} + \frac{1}{2}$	$ \tilde{l} + \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2}\rangle$		$ \tilde{l} + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\rangle$
\tilde{l}		$ \tilde{l}, k\rangle$	
$\tilde{l} - \frac{1}{2}$	$ \tilde{l} - \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2}\rangle$		$ \tilde{l} - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\rangle$

$$2\tilde{l} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

$$k = -\tilde{l}, -\tilde{l} + 1, \dots, \tilde{l} - 1, \tilde{l}$$

\tilde{l} は最高Weight a_2

a_1

	$k - \frac{1}{2}$	k	$k + \frac{1}{2}$
$\tilde{l} + \frac{1}{2}$	$ \tilde{l} + \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2}\rangle$		$ \tilde{l} + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\rangle$
\tilde{l}		$ \tilde{l}, k\rangle$	
$\tilde{l} - \frac{1}{2}$	$ \tilde{l} - \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2}\rangle$		$ \tilde{l} - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\rangle$

水素原子の束縛状態のボソン表現

- ❖ 二つのスピノールのテンソル積で束縛状態の波動関数を表せる
- ❖ $so(4) = su(2) \oplus su(2)$ を用いる。Pauli (1926) の解法。

$$\Psi_{\tilde{l}, m_a, m_b} = |\tilde{l}, m_a\rangle \otimes |\tilde{l}, m_b\rangle$$

$$2l \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad m_a, m_b = -\tilde{l}, -\tilde{l} + 1, \dots, \tilde{l} + 1, \tilde{l}$$

主量子数は $N = 2\tilde{l} + 1$ で与えられる。

- ❖ 水素原子の束縛状態は四種類のボソン生成演算子で表現可能

$$|\tilde{l}, m_a\rangle \otimes |\tilde{l}, m_b\rangle = \frac{(a_1^\dagger)^{\tilde{l}-m_a} (a_2^\dagger)^{\tilde{l}+m_a} (b_1^\dagger)^{\tilde{l}-m_b} (b_2^\dagger)^{\tilde{l}+m_b}}{\sqrt{(\tilde{l}-m_a)!(\tilde{l}+m_a)!(\tilde{l}-m_b)!(\tilde{l}+m_b)!}} |0, 0\rangle \otimes |0, 0\rangle$$

aボソンの合計数=bボソンの合計数= $2\tilde{l}$

- 放物線座標表示・四次元等方調和振動子と関連がある。

- P. Kustaanheimo, [E. Stiefel](#). (1965). J. Math. Bd, 218, 27. (四次元等方調和振動子への変換)
- E. Schrodinger, Ann. Physik, 80, 437 (1926). (放物線座標表示)

力学的対称代数so(4)のボソン表現

❖ 力学的対称代数so(4)はボソン表現可能である。

$$L_i = \frac{1}{2} \hat{L}_{ijk} \epsilon_{ijk} = \frac{1}{2} (A^\dagger \tilde{\sigma}_i A + B^\dagger \tilde{\sigma}_i B)$$

$$\tilde{M}_i = \hat{L}_{i4} = \frac{1}{2} (A^\dagger \tilde{\sigma}_i A - B^\dagger \tilde{\sigma}_i B)$$

ただし、

$$\tilde{\sigma}_i = \sigma_2 \sigma_i \sigma_2 \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

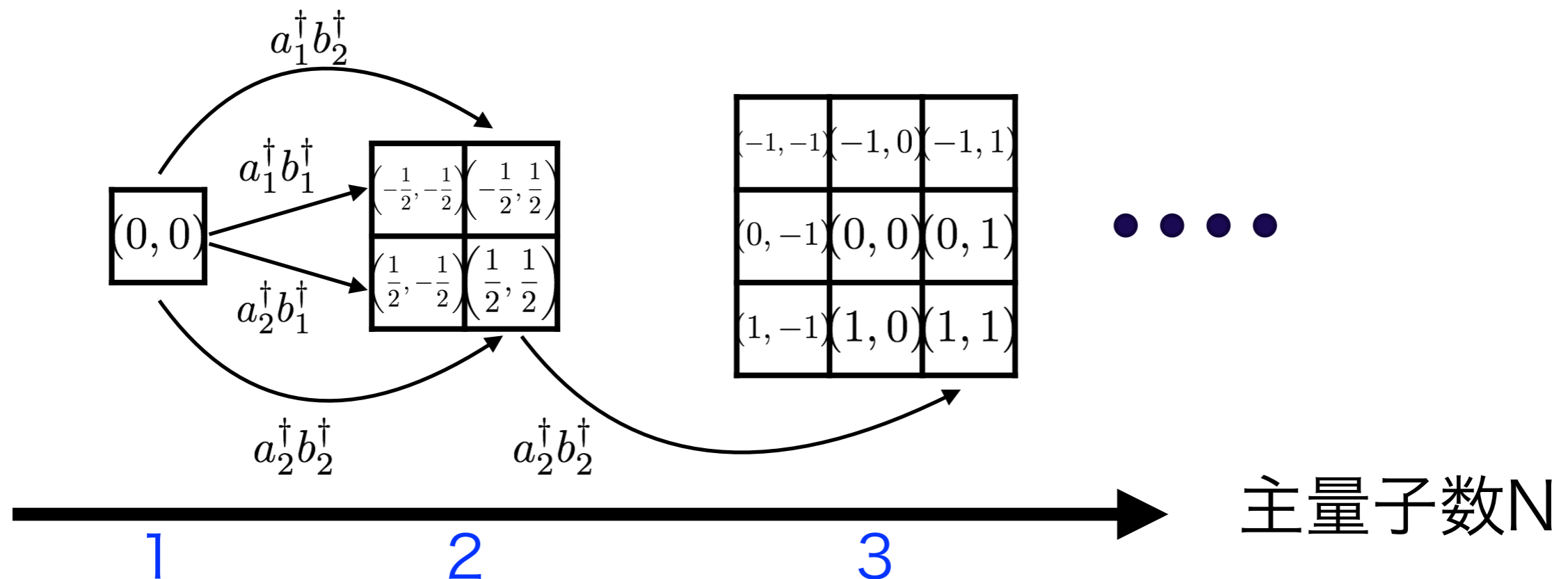
$$A^\dagger = \begin{pmatrix} a_1^\dagger & a_2^\dagger \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad B^\dagger = \begin{pmatrix} b_1^\dagger & b_2^\dagger \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

❖ 束縛固有状態にso(4)の演算子が作用しても、aボソン、bボソンの数はそれぞれ保存される。(角運動量・LRLベクトル保存則に他ならない)

スペクトル生成（消滅）演算子

- ❖ スペクトル生成（消滅）演算子をボソン演算子表示したい。
- ❖ 考え方：AボソンとBボソンを同時に増やさないと、束縛状態の全体がなす空間から逸脱する。
- ❖ スペクトル生成（消滅）演算子の形は以下のものになる。

$$a_1^\dagger b_1^\dagger, a_1^\dagger b_2^\dagger, a_2^\dagger b_1^\dagger, a_2^\dagger b_2^\dagger, a_1 b_1, a_1 b_2, a_2 b_1, a_2 b_2$$



so(4,2)代数の構成

❖ 力学的対称代数so(4)

$$L_i = \frac{1}{2} \hat{L}_{j k} \epsilon_{i j k} = \frac{1}{2} (A^\dagger \tilde{\sigma}_i A + B^\dagger \tilde{\sigma}_i B) \quad \tilde{M}_i = \hat{L}_{i 4} = \frac{1}{2} (A^\dagger \tilde{\sigma}_i A - B^\dagger \tilde{\sigma}_i B)$$

❖ スペクトル生成（消滅）演算子のエルミート化

$$\hat{L}_{15} = \frac{i}{2} (a_1^\dagger b_1^\dagger - a_2^\dagger b_2^\dagger) + \text{h.c.} \quad \hat{L}_{16} = -\frac{1}{2} (a_1^\dagger b_1^\dagger - a_2^\dagger b_2^\dagger) + \text{h.c.}$$

$$\hat{L}_{25} = -\frac{1}{2} (a_1^\dagger b_1^\dagger + a_2^\dagger b_2^\dagger) + \text{h.c.} \quad \hat{L}_{26} = -\frac{i}{2} (a_1^\dagger b_1^\dagger + a_2^\dagger b_2^\dagger) + \text{h.c.}$$

$$\hat{L}_{35} = -\frac{i}{2} (a_1^\dagger b_2^\dagger + a_2^\dagger b_1^\dagger) + \text{h.c.} \quad \hat{L}_{36} = \frac{1}{2} (a_1^\dagger b_2^\dagger + a_2^\dagger b_1^\dagger) + \text{h.c.}$$

$$\hat{L}_{45} = \frac{1}{2} (a_1^\dagger b_2^\dagger - a_2^\dagger b_1^\dagger) + \text{h.c.} \quad \hat{L}_{46} = \frac{i}{2} (a_1^\dagger b_2^\dagger - a_2^\dagger b_1^\dagger) + \text{h.c.}$$

❖ L56を追加するとso(4,2)代数を構成できる。

$$\hat{L}_{56} = \frac{1}{2} (A^\dagger A + B^\dagger B + 2)$$

$$[\hat{L}_{\mu\nu}, \hat{L}_{\rho\sigma}] = i\hbar (\eta_{\mu\rho} \hat{L}_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma} \hat{L}_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho} \hat{L}_{\mu\sigma} + \eta_{\nu\sigma} \hat{L}_{\mu\rho})$$

$$\eta = \text{diag}(1, 1, 1, 1, -1)$$

考察：二つのso(4,2)の関係

- ❖ 第一のso(4,2)は運動量空間の共形代数に各エネルギー状態の対称代数とスペクトル生成代数を組み込む形で構成した。
- ❖ 第二のso(4,2)は束縛状態の力学的対称代数にスペクトル生成(消滅)演算子を組み込む形で構成した。
- ❖ 束縛状態の主量子数を与える演算子については同じ役割

$$\tilde{L}_{56} = \tilde{N}_0$$

$$\hat{L}_{56} \Psi_{\tilde{l}, m_a, m_b} = (2\tilde{l} + 1) \Psi_{\tilde{l}, m_a, m_b} = N \Psi_{\tilde{l}, m_a, m_b}$$

- ❖ エルミート性が異なる。第一のso(4)は全てエルミート。

$$\tilde{L}_{i4} = L_{i4} - \frac{i\hbar a}{2} p_i \quad \text{非エルミート}$$

$$\tilde{M}_i = \hat{L}_{i4} = \frac{1}{2} (A^\dagger \tilde{\sigma}_i A - B^\dagger \tilde{\sigma}_i B) \quad \text{エルミート}$$

✓ 二つのso(4,2)の関係は今後明らかにしたい。

まとめ

(1) 幾何学的LRLベクトルからのso(4,2)構成

$$M = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2m_e} (\mathbf{x}p^2 - 2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{p})\mathbf{p}) + xH \right\} + \text{h.c.}$$

を出発点に、so(4,1)を構成し、su(1,1)を組み込むことでso(4,2)を構成した。

背後に運動量空間において共形不変性を持つ理論がある。

(2) 物理的LRLベクトルからのso(4,2)構成

$$M(E) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2m_e} (\mathbf{x}p^2 - 2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{p})\mathbf{p}) + xE \right\} + \text{h.c.}$$

を出発点に、ボソン代数を考え、スペクトル生成・消滅演算子のエルミート化によってso(4,2)が自然に構成される。

今後明らかにしたいこと

- ❖ スペクトル生成代数 $\mathfrak{su}(1,1)$ を用いた固有値問題について、古典軌道の型とリー部分群の型の関係は今後明らかにしたい。
- ❖ $[M(E), M(E)]$ と $[M, M](E)$ の一致のメカニズムを明らかにしたい。
- ❖ 二種類の $SO(4,2)$ の関係性を明らかにしたい。(上の問題と関連している。)
- ❖ 力学的群の幾何学的な意味合いについても明らかにしたい。